CATECHISMO

DI

MATEMATICHE PURE

AD USO DEGLI STUDI GENERALI

Mathesis philosophiae, et scientiis initia, ac veluti mammam praebet.
Bac.

PARTE PRIMA

DI

CARLO ROCCO

PROFESSORE DI GEOMETRIA NEL REAL COLLEGIO MILITARE.

NAPOLI
Dalla Reale Tipografia della Guerra
1842.

PREFAZIONE.

Questo Catechismo sarà diviso in tre parti, delle quali esce ora in luce la prima sezione della prima parte, che comprende la geometria piana. La seconda sezione tratta della geometria solida, e sarà pubblicata al più presto possibile; e così in progresso. Abbenchè l'Aritmetica sia la base fondamentale delle Matematiche, nondimeno abbiamo stimato di non dovercene da principio occupare in un lavoro catechistico, dapoichè le operazioni dell'Aritmetica devono essere apprese in tutte le loro più minute particolarità, ed a ciò hanno pienamente provveduto eccellenti trattati di questa scienza non solo presso le nazioni straniere, ma ancora presso di noi. Laonde nella prima parte di questo lavoro supponiamo conosciute le nozioni più volgari di Aritmetica; perocchè delle teoriche più elevate abbiamo noi stessi riportata in questa prima sezione quella delle ragioni e delle proporzioni, e parleremo delle altre nella seconda parte, allorchè tratteremo dell'analisi algebrica. Altronde si sa che matematici illustri hanno messo in discussione se la stessa compiuta istituzione matematica debba principiare dall'Aritmetica, oppure dalla Geometria. Per queste ragioni abbiamo incominciato dalla geometria piana, e speriamo che la gioventù studiosa non incontrerà difficoltà alcuna ad intenderla, quantunque nella nostra geometria non trovisi dato il bando alle considerazioni aritmetiche, siccome vorrebbero presso di noi alcuni ammiratori e forse non buoni interpetri de'geometri antichi. Premesse queste avvertenze, crediamo necessario dir qualche cosa intorno allo scopo che abbiamo avuto in mira nello scrivere i principj fondamentali della geometria piana, a fine di dileguare, certi pregiudizj, che a nostro modo di vedere, sussistono ancora presso molti.

Se la difficoltà di fare buoni elementi in qualsivoglia scienza è grandissima, essa cresce a dismisura allorchè trattasi di geometria. Infatti chi imprende a scrivere di questa scienza, si trova prima di tutto in concorrenza con un autore protetto dalla sanzione de' secoli, cioè con Euclide; e questa concorrenza è sempre pericolosa per un autore moderno, qualunque siano le ragioni che egli possa addurre in sostegno del sistema da lui adottato. Oltre a ciò esiste un' altra difficoltà gravissima, proveniente essa pure dalla esagerata venerazione degli antichi geometri, cioè quella di dover adoperare nella esposizione il metodo sintetico, il quale di sua natura costringe lo scrittore a travolgere l' ordine naturale delle idee, e per esser breve si corre il rischio di non presentare le teoriche in tutta quella pienezza di luce che si conviene; senza porre a calcolo che il metodo sintetico rinchiude la mente come nel circolo di Popilio, dal quale non è permesso di uscire. E la singolarità di una tale maniera di procedere, ch'è divenuta una specie di convenzione obbligatoria, sta in questo; cioè che il metodo sintetico si adopera ne'soli elementi di geometria, che formano parte essenziale del corso delle matematiche, nel rimanente del quale non si usa altro che il metodo analitico! Chi dunque si mette nella difficile posizione di scrivere elementi geometrici deve temere di essere biasimato dai partigiani delle antiche forme, alle quali non si può dare di questi tempi tutto il minutissimo sviluppo che essi vorrebbero, senza rinunziare al senso comune; ed essere ugualmente criticato da coloro, i quali pensano che quelle forme servono soltanto ad imbrogliare la mente de' principianti, che in vece dovrebbero assai per tempo manodursi ne' procedimenti analitici, senza i quali non si può mai arrivare a formarsi idea dello stato attuale delle matematiche pure e miste. Or se le difficoltà accennate sono grandissime per chi imprende a scrivere una istituzione formale di geometria, che si dovrà dire di chi scrive un Catechismo di Geometria? Può dirsi per certo ch'egli si trova sul letto di Procuste; perocchè alla brevità imposta da un lavoro di questo genere devesi accoppiare l'e-

sattezza delle idee, dalla quale non si può prescindere se non si vuol correre il rischio di guastare per sempre il criterio de' giovani nell'apprendimento delle matematiche, che sarebbe un fallo imperdonabile. Si aggiunge ancora nel nostro caso, che dovendo dare in appresso una idea esatta di alcuni difficili argomenti delle parti più elevate delle matematiche pure, senza scriverne trattati, era indispensabile di stabilire, a fondamento del lavoro, tutti i più importanti teoremi della geometria piana; il che ripugnava alla brevità, ed alla natura di un Catechismo.

Messi in questa tortura abbiamo tentato di trovare un mezzo termine a fine di evitare per quanto fosse possibile gli scogli, di cui è parola. Quindi ci siamo innanzi tratto sforzati di dare alle proposizioni di geometria una disposizione confacente all'ordine naturale delle idee, e con questa veduta ci siamo occupati prima delle figure rettilinee, e poi delle proprietà del cerchio, osservando che bastava la sola definizione del cerchio per dare la compiuta teorica delle accennate figure. La necessità di questa separazione era sostenuta dall'osservazione che tutte le proprietà del cerchio, ch'è la sola figura curvilinea di cui si parla negli elementi di geometria, dipendono necessariamente da quelle delle figure rettilinee. Una tal separazione era stata fatta dal Develey, e da qualche altro dotto geometra, ma non ci sembrò perfetta; dapoichè essi non avevano potuto dispensarsi dal riunire tutti i problemi alla fine de'loro trattati di geometria; e per conseguenza la teorica delle figure rettilinee non risultava compiuta, poichè per esser tale aveva bisogno appunto della risoluzione di alcuni di quei problemi, e si sa che niun problema di geometria elementare si può risolvere senza l'intersezione della linea retta col cerchio, o di due cerchi fra loro. Ci sembra dunque di esser riusciti per la prima volta a separare come si conveniva le proprietà del cerchio da quelle delle figure rettilinee. Superata questa principalissima difficoltà, secondo la nostra maniera di vedere, restava a dover disporre le proposizioni in un ordine non arbitrario, ma analitico per quanto fosse pos-

sibile. E qui presentavasi un'altra difficoltà gravissima, cioè quella di esporre convenientemente la importante teorica delle parallele all'entrata della scienza, senza aver parlato delle proprietà del triangolo; perocchè ognun vede che per l'ordine naturale delle idee, le proprietà dipendenti dalle varie posizioni di due linee rette debbono precedere quelle de'triangoli, che sono figure chiuse da tre linee. Crediamo di esser riusciti a superare questa nuova difficoltà in un modo semplicissimo, dal quale abbiamo ricavato ancora un altro vantaggio, cioè quello di abbreviare il cammino che dovevamo percorrere. Dopo tutto ciò riusciva agevole il disporre le proposizioni in un ordine facile e metodico per poterle apprendere e ritenere; e bastava distribuirle in capitoli, premettere ad ogni capitolo qualche opportuna introduzione, e ricorrere agli scolj per far vedere il legame esistente tra le proposizioni medesime: in tal modo spariva da una parte l'aridità che osservasi comunemente ne'libri di geometria, e si conservava dall'altra alle proposizioni principali la forma sintetica, creduta generalmente necessaria ne'primi elementi. Purtuttavolta restava sempre non interamente vinta un'ultima difficoltà dipendente dalla natura del lavoro, quella cioè di dover essere brevi; anzi sembrava che siffatta difficoltà, tolta in parte dalla disposizione delle materie di cui abbiam parlato, si riproducesse in tutta la sua forza con la necessità di stabilire mediante opportune dichiarazioni il legame esistente fra le proposizioni. Quindi conveniva trovare il modo di abbreviare notabilmente le dimostrazioni, senza nuocere al rigore, ed alla chiarezza necessaria; è ciò era impossibile senza tentar nuove vie, siccome ci era già riuscito di fare per le parallele. Per evitare noja al lettore non entreremo qui in alcuna particolarità a questo riguardo, limitandoci soltanto a dire che una delle maggiori abbreviazioni è stata quella di aver data la misura diretta del rettangolo, con una dimostrazione rigorosa in cui ci siamo serviti del metodo di esaustione, senza passare per i rapporti delle figure; per la qual cosa molte proposizioni si sono trovate ridotte a semplici corollarj. La brevità conseguita

da tutte queste speculazioni è tale che se si riducesse la nostra geometria sotto la forma arida delle geometrie ordinarie, levandone le introduzioni, le dichiarazioni, e le non poche note, non oltrepasserebbe tre o quattro fogli di stampa; eppure essa contiene la teorica compiuta delle ragioni e proporzioni, che non trovasi nel Legendre, nel Lacroix, ed in altri autori; vi è esposta la difficile teorica delle intersezioni e de' contatti de' cerchi ampiamente, e senza le difficoltà che i geometri rigorosi incontrano in quelle conosciute, non esclusa la euclidea; inoltre, si è reso completo ciò che dice il Legendre intorno ai rapporti de' lati de' poligoni regolari iscritti col raggio, aggiungendovi una dimostrazione semplicissima di una proposizione del lib. 13 di Euclide; di più, in luogo di dare la misura del cerchio, col metodo degli infinitamente piccoli, o con quello de' limiti, abbiamo riprodotto la genuina rigorosa dimostrazione del grande Archimede fatta col metodo di esaustione, del quale ci siamo anche serviti per altri importanti teoremi, onde in questa parte il nostro catechismo è sicuramente superiore ai lavori degli espositori de' teoremi di Archimede su la misura del cerchio: ed infine riassumendo, abbiamo nella nostra geometria riportate tutte le proposizioni, che formano il testo della geometria del Legendre, eccetto alcune poche che non erano necessarie nel nostro sistema, o che sono semplici esercizj di scuola, di maniera che non si trovano neppure nel Lacroix, ed in altri moderni scrittori.

Confidiamo adunque che i geometri vorranno compatire i nostri sforzi, e sarà questo il solo compenso che ci aspettiamo della fatica durata.

CATECHISMO
DI
MATEMATICHE PURE.

SEZIONE PRIMA.

GEOMETRIA PIANA.

CAPITOLO PRIMO.

NOZIONI PRELIMINARI.

1. *Grandezza* dicesi tutto ciò ch'è suscettivo di accrescimento e di diminuzione; tutto ciò, di cui si può assegnare o concepire il doppio o la metà, il triplo o la terza parte, ecc.

2. Grandezza *discreta* o *Numero* è la collezione di più cose, o di più parti simili e separate; come dieci stelle, sette cavalli, otto ducati ecc., e si chiama unità una di quelle cose o di quelle parti simili.

3. Grandezza *continua* è quella, che si considera come un sol tutto, senza distinzione di parti. Si manifestano in tal modo l'*estensione* de' corpi in generale, ed in particolare i loro contorni, e le *facce*, che ne determinano le forme.

4. Il carattere proprio e distintivo dell'*estensione* è dunque riposto nel legame o *continuità* delle parti, che non si possono nè scorgere, nè numerare. Al contrario nel numero si considera solamente la *quantità*, ossia si considera quante cose o parti simili contiene.

5. E poichè ogni grandezza si può ridurre a numero, paragonandola ad un' altra della stessa specie presa per unità, è addivenuto che la parola *quantità* si è appropriata alla grandezza in generale, chiamandosi *quantità continua* la grandezza considerata come continua, per distinguerla dal numero, che si è chiamato *quantità discreta* o *discontinua*.

6. Le Scienze *Matematiche* hanno per soggetto le grandezze. Esse esaminano le relazioni di sito, le proprietà che presentano le forme dei corpi in quanto alla loro estensione, ed i rapporti di quantità che risultano dal loro confronto.

7. L'*Aritmetica* considera specialmente i numeri. La grandezza continua forma il soggetto della *Geometria*, la quale perciò vien chiamata la scienza dell'estensione.

8. L'estensione ha tre dimensioni, lunghezza, larghezza, e profondità.

9. La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

I *termini*, o estremità di una linea si chiamano *punti*. Il punto non ha dunque estensione alcuna.

10. La *linea retta* è la più breve di tutte quelle linee, che si possono condurre da un punto ad un altro.

11. Ogni linea che non è retta, nè composta di linee rette, dicesi *linea curva*.

Così (fig. 1) AB è una linea retta, $ACDB$ una linea *spezzata* o composta di linee rette, ed AEB è una linea curva.

12. La *Superficie* è ciò che ha lunghezza e larghezza, senza profondità.

13. Il *piano* è quella superficie, nella quale prendendo due punti ad arbitrio, ed unendoli con una linea retta, questa linea trovasi tutta intera nella superficie.

14. Ogni superficie, che non è piana, nè composta di superficie piane, dicesi *superficie curva*.

15. *Solido* o *corpo* è ciò che riunisce le tre dimensioni dell'estensione.

16. La *circonferenza del cerchio* (fig. 2) è una linea curva AFD esistente in un piano, i cui punti sono tutti ugualmente distanti da un punto interno C, che si chiama *centro*.

17. La superficie piana terminata d'ogni intorno dalla circonferenza dicesi *cerchio o circolo*.

18. La retta condotta dal centro ad un puuto della circonferenza appellasi *raggio*.

19. Ogni retta come AB che passa pel centro C, e termina alla circonferenza dall'una e dall'altra parte, si dirà *diametro*.

20. In virtù della definizione del cerchio è evidente che tutt'i raggi AC, CE, CD, CB, CF, ecc. sono uguali fra loro, come pure tutti i diametri; e che ogni diametro è doppio del raggio.

21. Tutto ciò che non è corpo, o che non è attributo di un corpo, non può cadere sotto i nostri sensi. Altronde se si togliesse ad un corpo una delle sue tre dimensioni, esso cesserebbe di esistere. Ciò non ostante la Geometria considera il punto come non avente alcuna estensione, la linea come estesa solamente in lunghezza, e la superficie come una lunghezza e larghezza, senza profondità. Da ciò alcuni filosofi hanno dedotto che i punti, le linee, e le superficie sono pure astrazioni, che non possono appartenere ad alcuno oggetto posto fuori di noi; e quindi sono passati a mettere in dubbio la certezza e la utilità della Geometria medesima, negando l'esistenza delle parti dell'e-

stensione, di cui essa esamina le proprietà. Tutte queste difficoltà svaniscono, ove si rifletta che il punto, la linea, e la superficie esistono realmente, abbenchè non si possano separare dal corpo, di cui sono gli attributi. In fatti siasi qualunque il corpo, che si considera, esso è necessariamente terminato, senza di che non sarebbe distinto dallo spazio indefinito. Ora, i termini, che lo circoscrivono, sono le superficie, che hanno per termini le linee, e queste stesse terminano ne' punti. E non solamente questi termini esistono, ma di più cadono sotto ai nostri sensi, dapoichè col loro mezzo arriviamo a conoscere la figura de' corpi. Che se poi la Geometria considera i punti indipendentemente dalle linee, le linee indipendentemente dalle superficie, e le superficie indipendentemente da' solidi, ciò deriva dalla limitazione del nostro intelletto, che non potendo comprendere distintamente più cose ad un tratto, è costretto a separare per astrazione ciò che la natura ha congiunto con indissolubile legame. L' utilità di questa astrazione si manifesta in infiniti casi, ne' quali si deve esaminare una sola dimensione, trascurando le altre; come avviene quando si vuol sapere l' altezza di una torre senza aver riguardo alla sua larghezza, ed alla sua lunghezza, la larghezza di un fiume senza la lunghezza e profondità dello stesso, ecc.

Da ciò si vede che la Geometria ha le sue basi in natura; e che lo studio di essa è di una immensa utilità.

Spiegazione di alcuni termini.

22. Il metodo, che comunemente si adopera nella esposizione della Geometria, consiste specialmente nel ridurre le verità di questa Scienza ad altrettante proposizioni, cui si danno diversi nomi, secondo la natura di esse.

23. *Teorema* è una proposizione, la quale diviene evidente per mezzo di un ragionamento, che chiamasi *dimostrazione*.

24. *Problema* è una quistione proposta, che esige una *soluzione*.

25. *Lemma* è una proposizione, che si premette per facilitare la dimostrazione di un teorema, o la soluzione di un problema.

26. *Corollario* è la conseguenza, che si deduce da una o da più proposizioni.

27. *Scolio* è una osservazione, che si fa sopra una o più proposizioni precedenti, diretta a far conoscere il loro legame, la loro utilità, la loro generalità, o la loro limitazione. Talvolta lo scolio si premette come preparazione alle proposizioni che seguono; e talvolta ancora si adopera per legittimare o per dichiarare un qualche principio.

28. La Geometria non potrebbe giugnere a dimostrare i teoremi, ed a risolvere i problemi senza appoggiarsi ad alcuni prin-

cipj che sono inerenti al soggetto proprio di questa scienza; e che si devono premettere ed accettare senza alcuna dimostrazione; poichè se tutto si dovesse dimostrare non esisterebbe più alcuna scienza. I principj, di cui si parla, si contengono negli *assiomi*, e ne' *postulati* o dimande.

29. *Assioma* è una verità che per divenire evidente non richiede altra spiegazione, che quella de' vocaboli con cui si enuncia.

La Geometria si vale di due specie di assiomi; cioè di quelli che le sono comuni coll' Aritmetica; e di quelli che spettano ad essa sola.

30. I primi si chiamano ancora *notizie comuni*, e sono i seguenti:

1.° Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è uguale alla somma delle parti, nelle quali è stato diviso.

2.° Due quantità uguali ad una terza sono uguali tra loro.

3.° Se a quantità uguali si aggiungono o se ne tolgono altre uguali, o una medesima comune ad ambedue, le somme o i residui saranno uguali.

4.° Se a quantità disuguali si aggiungono o se ne tolgono quantità uguali, o una stessa ad entrambe comune, le somme o i residui saranno disuguali.

31. Gli assiomi proprii della Geometria sono.

1.° Due grandezze, cioè linee, superficie, o solidi, sono uguali, quando *soprapposte* una all' altra coincidono in tutta la loro estensione.

2.° Da un punto ad un altro non si può condurre che una sola linea retta.

3.° Due linee rette che hanno due punti comuni coincidono una coll' altra in tutta la loro estensione, e non formano che una sola e medesima linea retta.

4.° Due punti bastano a determinare la *direzione* o posizione di una retta.

5.° Essendo la linea retta di sua natura *indefinita*, comunque in alcuni casi non se ne consideri che una parte, ne segue che se due rette hanno un sol punto di comune dovranno avere direzioni diverse.

6.° Reciprocamente se due rette hanno direzioni diverse, cioè s' incontrano senza soprapporsi, oppure si tagliano, non potranno avere più d'un punto di comune.

32. *Postulati* diconsi alcune operazioni così semplici che ognuno ammette la possibilità di effettuarle; e si effettuano realmente per mezzo della riga e del compasso. Essi sono i seguenti.

1.° Condurre una linea retta da un punto ad un altro.

2.° Prolungare una retta terminata.

3.° Con un dato punto preso per centro, e con un dato intervallo come raggio descrivere la circonferenza del cerchio.

4.° Da una retta maggiore tagliare una parte uguale alla minore (*).

33. *Scolio*. Le operazioni suddette appartengono propriamente alle pratiche meccaniche. La Geometria non insegna a descrivere la linea retta, ed il cerchio, ma mette come postulato che si sappiano descrivere *accuratamente* prima di applicarsi allo studio di essa. Le descrizioni della linea retta, e del cerchio sono problemi, ma non geometrici. Si dimanda alla meccanica la loro soluzione; poi nella Geometria s'insegna l'uso che deve farsene. E si gloria la Geometria di eseguire così grandi cose appoggiandosi a pochi principii presi altrove. È dunque fondata la Geometria sulla meccanica pratica, e non è altro che quella parte della meccanica universale che espone e dimostra l'arte di misurare *accuratamente* (**).

Spiegazione di alcuni segni.

34. Per servire alla brevità del discorso faremo uso talvolta de' segni qui appresso:

1.° Il segno $=$ indica l'uguaglianza tra due quantità; così $A=B$ si pronunzia, A è uguale a B.

2.° Il segno $+$ significa *più*, e serve a dinotare l'addizione, onde $A+B$ rappresenta la somma delle due quantità A e B.

3.° Il segno $-$ si pronunzia *meno*, ed indica la sottrazio-

---

(*) Nelle più eccellenti istituzioni moderne di Geometria, come quelle del Legendre, del Lacroix, ec. non si fa alcuna menzione nè di questi, nè di altri postulati, di cui si fa uso per la dimostrazione di alcuni teoremi, perchè con ragione si considerano come conseguenze immediate ed evidenti delle definizioni. Noi gli abbiamo riportati non tanto per dare agli studiosi la conoscenza di un vocabolo frequentemente adoperato dai Matematici, quanto per fissare la lora attenzione sopra i principj fondamentali della Geometria, giusta i profondi pensamenti del Newton espressi nello scolio seguente. Intanto giova avvertire che il postulato 4.° trovasi come problema nella Prop. 3 lib. 1 degli Elementi di Euclide. Le precedenti considerazioni basterebbero a giustificare la nostra maniera di vedere; non pertanto ecco come esprimesi intorno a ciò l'illustre Boscovich.

« Ope postulati tertii ad datum puuctum poni potest recta aequalis rectae » datae, quod Euclidi est Prop. 2 lib. I. Id ipse *operosiore methodo* » solvit, cum non assumat inter postulata translationem intervalli ex uno » in alium locum, quod nos ut *evidenter possibile, et factu facile* as- » sumpsimus cum aliis multis (Elem. Math. T. I. pag. 271).

E si noti ancora che Euclide per non aver ammesso questo postulato, e qualche altro del pari evidente, è stato costretto a dar principio alla Geometria colla risoluzione di tre problemi, ed a travolgere l'ordine naturale delle proposizioni, onde si è attirato la giusta censura di uomini insigni, che che in contrario siasi detto dal Keil, e da qualche altro esaltato panegirista degli antichi.

(**) Newton. *Princip. Mathem.* nella prefazione.

ne: così $A - B$ rappresenta la differenza delle due quantità A e B, ossia ciò che resta togliendo B da A.

4.° Il segno $\times$ indica la moltiplicazione, onde $A \times B$ significa che A si deve moltiplicare per B.

5.° Finalmente $A : B$, oppure $\frac{A}{B}$ vuol dire che A si deve dividere per B.

CAPITOLO II.

DEGLI ANGOLI, E DELLE RETTE PARALLELE.

35. Tirando due linee rette in un piano, possono accadere due casi, cioè che s'incontrino senza formare una sola linea, o che comunque prolungate non s'incontrino mai. Nel primo caso si dice che le due rette fanno *angolo*, nel secondo si dice che sono *parallele*.

36. L'angolo non si può definire esattamente; nondimeno noi diremo col celebre Legendre che « quando le due rette AB,AC » (fig. 3) s'incontrano, la quantità più o meno grande, di cui » esse si allontanano l'una dall'altra, in quanto alla loro situa- » zione, dicesi *angolo* (*).

37. Le due rette medesime si chiamano *lati* dell'angolo, ed il punto ad esse comune appellasi *vertice* dell'angolo.

L'angolo s'indica alle volte colla sola lettera A del vertice; altre volte poi con tre lettere, dicendosi l'angolo BAC, o CAB, avvertendo sempre di mettere in mezzo la lettera del vertice.

38. Due angoli sono uguali allorchè situando il vertice dell'uno sul vertice dell'altro, ed applicando un lato sopra un lato, i rimanenti due lati si confondono in una medesima direzione.

Da ciò risulta evidentemente che la grandezza di un angolo non dipende dalla lunghezza dei suoi lati. Quanto si è detto basta per avere una nozione completa dell'angolo, e per comprendere facilmente tutte le conseguenze che ne derivano, poco importando che non possa darsi una esatta definizione di esso angolo.

39. Gli angoli possono sommarsi, e sottrarsi: così (fig. 4) si vede che l'angolo BAD è la somma dei due angoli BAC,CAD; e che l'angolo CAD è la differenza dei due angoli BAD,BAC.

(*) Euclide dicendo esser l'angolo l'inclinazione di due linee lo definisce con un sinonimo, come osserva Lacroix. Ecco perchè questa definizione non è stata approvata da D'Alembert, da Simson, e da un gran numero di geometri moderni. Essa non piacque agli stessi geometri Greci, come si rileva da Proclo, e basterà dire che il grande Apollonio ha definito l'angolo in un altro modo; il che prova che i Greci non avevano per Euclide quella superstiziosa venerazione, che affettano certi pretesi *ristauratori*, e *vendicatori* del testo greco di quel geometra.

40. Quando gli angoli *adiacenti* BAC, CAD (fig. 5) formati dall'incontro delle due rette CA, BD sono uguali tra loro, ciascuno di essi dicesi *angolo retto*, e la linea CA è detta *perpendicolare* alla linea BD.

Da questa definizione si deduce evidentemente che tutti gli angoli retti sono uguali.

41. Se dal punto A (fig. 5) si conduca un'altra retta AE, l'angolo BAE maggiore del retto BAC chiamasi *angolo ottuso;* l'altro EAD minore del retto dicesi *acuto*. La linea AE poi, che forma angoli *adiacenti* disuguali colla retta BD appellasi *obliqua*.

PROPOSIZIONE PRIMA — *TEOREMA*.

42. *Se una retta* AE *ne incontra un'altra* BD, *la somma degli angoli adiacenti è uguale a due angoli retti* (fig. 5).

Dim. Imperocchè se la retta EA è perpendicolare a BD, la proposizione enunciata risulta evidente. Supponiamo dunque che sia obliqua, e dal punto A si concepisca inalzata sopra BD la perpendicolare AC (*). I due angoli BAE, EAD occupano lo

(*) La possibilità di un tal concetto è così manifesta che i Geometri moderni l'adoperano senza premettere alcuna spiegazione, considerandolo come conseguenza immediata ed evidente della definizione della perpendicolare. Infatti, supponendo che la linea EA (fig. 5) giri intorno al punto A verso B, è manifesto che l'angolo EAD da acuto potrà divenire ottuso; e perciò deve esistere una retta AC che faccia gli angoli CAD, CAB uguali fra loro, ovvero che sia perpendicolare a BD. Negli Elementi di Euclide trovansi alcuni postulati per i teoremi, come quello relativo alle parallele, quello in cui si dice che due rette non chiudono spazio, ec.; ma i moderni avendone aggiunti alcuni altri di pari evidenza hanno abbreviato le dimostrazioni, ed hanno potuto disporre le proposizioni con ordine migliore di quello tenuto da Euclide. Di più coll'ajuto di siffatti postulati Tommaso Simpson, Develey, ec. sono arrivati a separare totalmente i teoremi dai problemi, e Nicola Mercatore ha fatta questa separazione negli stessi Elementi di Euclide. Tale disposizione è perfettamente logica, ed è conforme alla dottrina di Aristotile, il quale nel secondo della Metafisica vuole che in ogni scienza si distingua la parte speculativa, che considera le verità solamente, dalla parte operativa, che ne forma il complemento, come quella che riguarda l'applicazione delle verità medesime.

Del resto il problema, in cui si tratta d'inalzare una perpendicolare, non dipende affatto da questa prima proposizione, onde tutte le proposizioni contenute nel secondo capitolo si potrebbero mettere, ove così si volesse, dopo la risoluzione di quel problema; e però non vi è alcun pericolo di circolo vizioso. Ma operando in tal guisa si caderebbe nel difetto d'ordine rimproverato ad Euclide; nè si potrebbe addurre altra ragione se non che il concetto della perpendicolare nella dimostrazione dei teoremi non trovasi adottato da quel Geometra! Con rincrescimento ci vediamo costretti a dover combattere in favore della gioventù studiosa pregiudizj così

stesso spazio che i due angoli retti *BAC*, *CAD*; poichè di quanto l'angolo ottuso *BAE* eccede il retto *BAC*, di tanto l'acuto *EAD* è minore del retto *CAD*; e però compensando l'eccesso dell'uno col difetto dell'altro ne risulta che la somma degli angoli adiacenti *BAE*, *EAD* dev' essere uguale a due retti. Ciò che doveva dimostrarsi.

PROPOSIZIONE II — *TEOREMA.*

43. *Se dallo stesso punto* C *della retta* CD *si tirino a parti contrarie le rette* CA, CB, *in guisa che la somma degli angoli adiacenti* DCA, DCB *sia uguale a due retti, le linee* AC, CB *formeranno una sola retta* AB (fig. 6).

Dim. Perocchè se *CB* non è il prolungamento di *AC*, lo sia *CF*; sarà quindi la somma degli angoli *ACD,DCF* uguale a due retti (n.° 42). Ma per ipotesi la somma degli angoli *ACD,DCB* è pure uguale a due retti; dunque la prima somma è eguale alla seconda, e se si tolga il comune angolo *ACD*, resterà l'angolo *DCF* uguale all'angolo *DCB*, cioè il tutto uguale alla parte; il che è assurdo (n.° 30). Dunque *CB* è il prolungamento di *AC*, ovvero *AC* e *CB* sono in linea retta. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE III — *TEOREMA.*

44. *Se due rette* AB,CD *si tagliano scambievolmente, gli angoli opposti al vertice sono uguali* (fig. 7).

---

meschini, e peggio così inveterati presso di noi, soprattutto ove si rifletta che Euclide nella Prop. 18 lib. V ammette senza scrupolo l'esistenza della quarta proporzionale a tre grandezze date qualunque, in modo che se le due prime rappresentano solidi, e la terza una linea retta, il Geometra Greco concepisce l'esistenza di una seconda retta che abbia colla prima lo stesso rapporto dei due solidi. Ciò è ben altro che concepire innalzata la perpendicolare, e l'esistenza del punto di mezzo d'una retta terminata, come fanno i moderni! Il Saccheri nel suo *Euclide vendicato*, il Clavio, e Roberto Simson si sono assai affaticati nel voler togliere questo preteso neo dagli Elementi Euclidei. Ma supponiamo che fossero riusciti nel loro intento; e supponiamo ancora che si possa evitare un altro concetto di non minore difficoltà assunto tacitamente da Euclide nella Prop. 2 lib. XII, di cui fa parola il citato Saccheri, ne seguirebbe che dopo due mila anni, e dopo tanti progressi delle matematiche dovremmo restare immobilmente attaccati alle forme Euclidee per compiacere a qualche antiquario? E non dovremmo dire piuttosto col dottissimo Lacroix che visto il disordine che regna negli Elementi di quel padre della scienza, si deve giudicare che questa non fosse abbastanza avanzata, onde poter conoscere e discutere tutti i rapporti delle proposizioni?

Dim. La somma degli angoli adiacenti *AOD,AOC* è uguale a due retti (n.° 42); similmente la somma degli angoli *AOD,DOB* è uguale a due retti, e però la prima somma è uguale alla seconda: si tolga il comune angolo *AOD*, e sarà l'angolo *AOC* uguale all' angolo *DOB*. Nello stesso modo si dimostrerà esser l'angolo *AOD* uguale al suo *verticale* *COB*. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE IV — *TEOREMA*.

45. *Se due rette* AB,CD *sono segate da un' altra* GH *in maniera che l'angolo esterno* GEB *sia uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte* EFD, *esse linee saranno parallele* (fig. 8).

Dim. L'angolo *GEB* è uguale all' angolo verticale *AEF* (n.° 44): similmente l'angolo *EFD* è uguale all' angolo verticale *CFH*. Supponendo dunque l'angolo *GEB* uguale all' angolo *EFD*, sarà ancora l'angolo esterno *CFH* uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte *AEF*; onde è manifesto che se le due rette *AB,CD* potessero incontrarsi da una parte, dovrebbero ancora incontrarsi dall'altra parte, ed allora tra i due punti d' incontro si potrebbero tirare due linee rette, il ch' è impossibile (n.° 31); dunque *AB* è parallela a *CD*. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE V — *TEOREMA*.

46. *Parimente saranno parallele le rette* AB,CD, *se sono uguali gli angoli alterni* AEF,EFD, *ovvero se i due interni dalla stessa parte* BEF,EFD *siano uguali a due retti* (fig. 8).

Dim. Perocchè essendo l'angolo *AEF* uguale al suo verticale *GEB*, ne risulta che l'angolo esterno *GEB* è uguale al suo interno ed opposto dalla stessa parte *EFD*, e però sarà *AB* parallela a *CD* (n.° 45).

In secondo luogo la somma degli angoli adiacenti *GEB,BEF* è uguale a due retti; ma per ipotesi è pure uguale a due retti la somma degli angoli *BEF,EFD*, se dunque si tolga il comune angolo *BEF*, sarà l'angolo esterno *GEB* uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte *EFD*, e perciò sarà *AB* parallela a *CD*. *C.D.D.*

47. *Scolio*. Essendosi dimostrato nel teorema precedente che le due (fig. 9) rette *AB,CD* sono parallele quando la somma degli angoli interni *BEF,EFD* è uguale a due retti, ne concluderemo che se pel punto *E* si conduca la retta *LEH*, la quale stia dentro l'angolo *BEF*, questa prolungandosi dalla parte di *H* dovrà incontrare la retta *CD*. Si potrà dunque stabilire che « se due rette » sieno segate da un' altra in modo che da una parte ne risultino » due angoli interni minori di due retti, e dall' altra maggiori,

» quelle due rette prolungate indefinitamente dovranno incontrarsi
» da quella parte dove stanno gli angoli minori di due retti (*).

PROPOSIZIONE VI — *TEOREMA.*

48. *Venendo segate due rette parallele* AB,CD *da un' altra* GH, *saranno i due angoli interni da qualunque parte, come* BEF,EFD, *uguali a due retti, l' esterno* GEB *uguale all' interno opposto dalla stessa parte* EFD, *e gli alterni* AEF,EFD *eguali tra loro* (fig. 8).

Dim. Perocchè se gl' interni BEF,EFD non fossero uguali a due retti, sarebbero essi, o i susseguenti AEF,EFC minori di due retti, onde le rette AB,CD non sarebbero parallele (n.° 47), contro la supposizione. Dunque debbono essere i due angoli interni da qualsivoglia parte uguali a due retti. Ma tanto la somma degli angoli GEB,BEF, quanto la somma degli angoli AEF,BEF è uguale a due retti, dunque ciascuna di queste somme è uguale a quella degli angoli interni BEF,EFD; e però tolto il comune angolo BEF, rimarrà l' angolo EFD uguale sì all' esterno GEB, come all' alterno AEF. $C.D.D.$

Da questa proposizione si può dedurre che

1.° Se due rette AB, CD (fig. 9) sono parallele, ogni linea retta perpendicolare ad una delle parallele sarà perpendicolare anco all' altra.

(*) Questa proposizione, che Euclide ha messa tra i postulati, è assai famosa; perchè tutti gli sforzi fatti nello spazio di due mila anni, a fine di dimostrarla *esattamente*, non hanno avuto alcun successo. Pure essa è così semplice che basta, come dice Laplace, la sola enunciazione per convincere chicchessia della sua giustezza. La difficoltà nasce dal non potersi dare una definizione esatta della linea retta, vale a dire una definizione, nella quale si assegnasse il carattere geometrico, che devono avere più punti per essere in linea retta. Dire con Euclide che la linea retta è quella che giace ugualmente tra i suoi punti, o con Archimede ch' è la più corta di tutte le linee, che si possono condurre da un punto ad un altro, non serve che a stabilire quelle proprietà semplicissime ed evidenti della linea retta, che abbiamo riportate tra gli assiomi. Ma la dimostrazione della proposizione, che forma il soggetto di questa nota, dipende totalmente dalla conoscenza dell' accennato carattere geometrico, ed ecco perchè non ha potuto aver luogo sinora. Convien quindi riguardare una tal proposizione come un supplemento necessario alla mancanza di una esatta definizione della linea retta; poichè è vano il tentare di definire o di provare quel risultamento immediato della sensazione, che ci fa conoscere la via più corta per andare da un punto ad un altro. Ma che che siasi di ciò, giova sapere che quanto di meglio è stato fatto, a fine di rischiarare un punto così difficile degli elementi di geometria, è tutto dovuto ai due celebri analisti, e per conseguenza grandi geometri, Bertrand di Ginevra, e Legendre. I Commentatori di Euclide, niuno escluso, sono stati i più infelici ne' tentativi che hanno fatto, per dimostrare il famoso postulato di quel geometra.

2.° *Due rette* AB, CD *parallele ad una terza* GK *sono parallele fra loro.*

Perocchè *OF* perpendicolare a *GK* sarà pure perpendicolare ad *AB*, ed a *CD*; laonde essendo l'angolo *OEB* eguale all'interno ed opposto *EFD*, perchè ambedue retti, le linee *AB, CD* debbono essere parallele.

CAPITOLO III.

DEI TRIANGOLI.

49. Con due rette comunque situate non si può mai terminare un piano da per ogni dove, ma vi bisognano almeno tre rette. Un piano terminato da tre rette dicesi *triangolo*: le tre rette medesime si chiamano *lati* del triangolo.

50. Un triangolo è *equilatero*, quando ha i tre lati uguali; *isoscele*, se ha due soli lati uguali; *scaleno*, quando i tre lati sono disuguali.

51. Archimede ha stabilito il seguente assioma o principio geometrico, il quale è stato ammesso da tutti i Geometri:

« Di due linee curve, o composte di rette, che terminano agli » stessi punti, e rivolgono la concavità dalla medesima parte, la » più lunga è quella che comprende l'altra dentro di essa; e la » linea retta è la più corta tra tutte le linee, che si possono con- » durre tra due punti ».

Così, la linea circondante *AFC* (fig. 10) è più lunga della linea circondata *ADEC*; questa è più lunga di *ABC*, e finalmente la retta *AC* è la più corta di tutte. Da ciò risultano immediatamente le proposizioni qui appresso:

1.° In ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due.

2.° Se dentro un triangolo *ABC* (fig. 11) si prenda un punto *D*, e si conducano le rette *DB*, *DC* alle estremità di un lato *BC*, la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati AB, AC.

52. Del resto, essendo la prima proposizione evidentissima, si può facilmente dedurne la seconda come legittima conseguenza. In fatti si prolunghi *BD* finchè incontri in *E* il lato *AC*.

Nel triangolo *BAE* il lato *BE* è minore della somma degli altri due *AB*, *AE*, onde aggiunta di comune *EC*, sarà la somma delle rette *BE*, *EC* minore di quella delle due *AB*, *AC*. Parimente nel triangolo *DEC* il lato *DC* è minore della somma de' lati *DE*, *EC*; aggiunta di comune *BD*, sarà la somma delle rette *BD*, *DC* minore di quella delle due *BE*, *EC*, e con più ragione di quella delle due *AB*, *AC*.

Caratteri dell' uguaglianza dei triangoli.

PROPOSIZIONE VII — *TEOREMA.*

53. ***Due triangoli sono uguali, quando hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali*** (fig. 12).

Dim. Nei triangoli ABC,EDF, sia l'angolo $A=E$, il lato $AB=DE$, il lato $AC=EF$: dico che i due triangoli sono uguali.

Si ponga il triangolo ABC sul triangolo EDF, facendo cadere il lato AB sul suo uguale DE: l'altro lato AC caderà sul suo uguale EF, perchè l'angolo A si è supposto uguale all'angolo E; onde il terzo lato BC dovrà coincidere col terzo lato DF, non potendosi tirare tra due punti che una sola linea retta. Dunque i due triangoli coincideranno; e però saranno uguali (n.° 31). *C.D.D.*

PROPOSIZIONE VIII — *TEOREMA.*

54. ***Due triangoli sono uguali, allorchè hanno un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali*** (fig. 12).

Dim. Sia il lato $BC=DF$, l'angolo $B=D$, e l'angolo $C=F$: dico che sarà il triangolo ABC uguale al triangolo EDF.

Perocchè sovrapponendo il triangolo ABC al triangolo EDF in modo che il lato BC coincida col suo uguale DF, l'angolo B dovrà coincidere coll'angolo D, ed il punto A si troverà in un punto della retta DE: similmente l'angolo C coinciderà coll'angolo F, ed il punto A dovrà trovarsi in un punto della retta FE. Dunque il punto A sarà nel tempo stesso sulla retta DE, e sulla retta FE; ma due rette non si possono tagliare che in un solo punto (n.° 31), dunque il punto A coinciderà col punto E; e però il triangolo ABC sarà uguale al triangolo EDF. $C.D.D.$

PROPOSIZIONE IX — *LEMMA.*

55. ***Se due lati d'un triangolo sono uguali respettivamente a due lati d'un altro triangolo, e l'angolo compreso dai primi è maggiore dell'angolo compreso dagli altri due, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo*** (fig. 13).

Dim. Ne' triangoli ABC, EDF sia il lato $AB=ED$, il lato $BC=DF$, e l'angolo ABC maggiore dell'angolo EDF; dico che il terzo lato AC sarà maggiore del terzo lato EF.

Si sovrapponga il triangolo EDF al triangolo ABC, in guisa che il lato DF coincida col suo uguale BC. È manifesto che il punto E potrà cadere o dentro il triangolo ABC, o sul lato AC, o fuori dello stesso triangolo ABC. Nel primo caso la somma de' due

lati EB, EC, ossiano ED, EF, sarà minore di quella de' lati AB, AC; e però togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale EB, resterà EC, ovvero EF, minore di AC. Nel secondo sarà $E'C$, ovvero EF, evidentemente minore di AC. Finalmente nel terzo, essendo il lato $E''C$ minore della somma de' lati $E''E'$, $E'C$, ed il lato AB minore della somma de' lati AE', $E'B$, ne risulterà che la somma de' lati $E''C$, AB sarà minore di quella delle quattro rette $E''E'$, $E'C$, AE', $E'B$, ossia delle due $E''B$, AC. Perlochè togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale $E''B$, resterà $E''C$ minore di AC. Dunque in tutti i casi EF è minore di AC. *C.D.D.*

56. *Scolio.* Reciprocamente, se due lati AB, BC del triangolo ABC sono uguali respettivamente a due lati ED, DF del triangolo EDF, ed il terzo lato AC del primo triangolo è maggiore del terzo lato EF del secondo, sarà l'angolo ABC maggiore dell'angolo EDF. Perocchè, se l'angolo ABC non è maggiore dell'angolo EDF, sarà o uguale, o minore; nel primo caso il lato AC sarebbe uguale al lato EF (n.° 53), nel secondo ne sarebbe minore contro la supposizione, dunque l'angolo ABC dev'essere maggiore dell'angolo EDF.

PROPOSIZIONE X — *TEOREMA.*

57. ***Due triangoli sono uguali quando hanno i tre lati respettivamente uguali*** (fig. 12).

Dim. Ne' due triangoli ABC, EDF, sia il lato $AB=DE$. $AC=EF$, $BC=DF$; dico che sarà l'angolo $A=E$, $B=D$, $C=F$,

Infatti se l'angolo A fosse maggiore dell'angolo E, sarebbe il lato opposto BC maggiore del lato DF (n.° 55), contro la supposizione; e se l'angolo A fosse minore dell'angolo E, il lato BC sarebbe minore del lato DF, anche contro la supposizione, dunque l'angolo A dev' esser uguale all'angolo E. Dimostrasi nello stesso modo che $B=D$, $C=F$; e però sarà il triangolo ABC uguale al triangolo EDF. *C.D.D.*

58. *Scolio.* Si osservi che ne' triangoli uguali, gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali.

Risoluzione di alcuni problemi.

PROPOSIZIONE XI — *PROBLEMA.*

59. *Sopra la retta data* AB *descrivere un triangolo equilatero* (fig. 14).

Soluzione. Si faccia centro in A, e con un raggio uguale ad AB si descriva una circonferenza; si faccia poi centro in B e col medesimo raggio si descriva un'altra circonferenza, che tagli la prima nel punto F; finalmente si tirino i raggi FA, FB, ed il triangolo AFB sarà evidentemente il triangolo equilatero richiesto.

PROPOSIZIONE XII — *PROBLEMA*.

60. *Dividere un angolo dato in due parti uguali* (fig. 15).

Soluzione. Sia da dividersi in due parti uguali l'angolo *ACB*. Si faccia centro in *C*, e con un raggio qualunque si prendano su i lati dell'angolo le parti uguali *CA*,*CB*; poi si conduca *AB*, e su questa si descriva il triangolo equilatero *ABF*; finalmente si tiri la retta *CF*; questa dividerà l'angolo dato in due parti uguali.

In fatti i due triangoli *ACF*,*CBF* sono uguali, perchè hanno i tre lati respettivamente uguali, onde sarà l'angolo *ACF* uguale all'angolo *BCF* (n.° 58).

PROPOSIZIONE XIII — *PROBLEMA*.

61. *Dividere una retta terminata in due parti uguali* (fig. 16).

Soluzione. Debbasi dividere la retta *AB* in due parti uguali. Si costruisca sopra *AB* il triangolo equilatero *ABF*; si divida l'angolo *AFB* in due parti uguali *AFO*,*OFB*, la retta *AB* resterà divisa in due parti uguali *AO*,*OB*.

Imperocchè i due triangoli *AFO*,*FOB* hanno il lato *FO* comune, il lato $AF=FB$, e l'angolo $AFO=OFB$, perciò saranno uguali (n.° 53), onde ne risulta che $AO=OB$.

PROPOSIZIONE XIV — *PROBLEMA*.

62. *Nel punto* A *della retta* AC *costruire un angolo uguale all'angolo dato* D (fig. 17).

Soluzione. Si faccia centro in *D*, e con un raggio qualunque si descriva una circonferenza, che tagli i lati dell'angolo ne' punti *E* ed *F*, e si conduca la retta *FE*. Si faccia poi centro in *A*, e con un raggio $AC=DE$ si descriva una circonferenza; indi fatto centro in *C*, e con un raggio $CB=EF$ si descriva un'altra circonferenza, che tagli la prima nel punto *B*, e si tirino le rette *AB*,*CB*, l'angolo *BAC* sarà uguale all'angolo dato *D*.

In fatti, i due triangoli *ABC*,*DEF* sono uguali, perchè hanno i tre lati respettivamente uguali (n.° 57), onde sarà l'angolo $A=D$.

PROPOSIZIONE XV — *PROBLEMA*.

63. *Condurre una perpendicolare ad una retta data* (fig. 18).

Soluzione. Supponiamo in primo luogo che la perpendicolare debba innalzarsi dal punto *C* sulla retta *MN*. Si faccia centro in

C, e con un raggio qualunque si descrivano due porzioni di circonferenza, che taglino la retta data MN ne' punti A e B; poi sopra AB si descriva il triangolo equilatero ADB, si tiri DC, questa sarà la perpendicolare richiesta.

In fatti, i due triangoli ADC,CDB hanno i tre lati respettivamente uguali; perciò sarà l'angolo ACD uguale all'angolo DCB, onde DC è perpendicolare ad AB (n.° 40).

Debba ora abbassarsi la perpendicolare dal punto D sulla retta MN. Si prenda il punto D per centro, e con un raggio sufficientemente grande si descriva una circonferenza, che tagli la linea MN ne' punti A e B, poi si divida la retta AB in due parti uguali nel punto C, si conduca DC, questa sarà la perpendicolare cercata.

Imperocchè tirando i raggi DA,DB, risulteranno uguali i due triangoli ADC,DCB, che hanno i tre lati respettivamente uguali, onde sarà l'angolo DCA uguale all'angolo DCB; e perciò DC è perpendicolare ad MN.

PROPOSIZIONE XVI — *PROBLEMA.*

64. *Per un dato punto* A *condurre una parallela alla retta data* CD (fig. 19).

Soluzione. Si prenda un punto F sopra CD, e si conduca AF; dipoi si faccia l'angolo EAF uguale all'angolo AFC, la retta AE sarà la parallela richiesta.

In fatti per la costruzione risultano uguali gli angoli alterni EAF,AFC; e però dev'essere AE parallela a DC (n.° 46).

Proprietà de' triangoli.

65. Le relazioni, ch'esistono fra i lati, o fra gli angoli di un triangolo, costituiscono le proprietà di esso. Eccone le principali.

PROPOSIZIONE XVII — *TEOREMA.*

66. *La somma degli angoli di qualunque triangolo è uguale a due angoli retti* (fig. 20).

Dim. Sia il triangolo ABC, dico che la somma de'tre angoli è uguale a due retti.

Si prolunghi il lato BC in D, e si tiri CE parallela ad AB. Gli angoli ACE,BAC sono uguali come alterni rispetto alla secante AC; rispetto poi alla secante BD l'angolo esterno ECD è uguale all'interno opposto dalla stessa parte ABC; dunque sarà tutto l'angolo ACD somma de'due ACE,ECD, uguale ai due angoli A e B presi insieme: si aggiunga di comune l'angolo ACB, e sarà la somma degli

angoli *ACD,ACB* uguale a quella de' tre angoli del triangolo; ma la prima somma è uguale a due retti (n.° 42), dunque lo sarà ancora la seconda. *C.D.D.*

67. *Scolio.* Questa proprietà del triangolo costituisce una delle più importanti proposizioni di geometria. Se ne deduce:

1.° Se in un triangolo si prolunga un lato, l' angolo esterno è uguale alla somma de' due interni opposti:

2.° Se due angoli di un triangolo sono uguali a due angoli di un altro, ancora il terzo angolo di questo sarà eguale al terzo di quello.

3.° In un triangolo non vi può essere che un solo angolo retto, e con più ragione un solo angolo ottuso.

Da ciò ne segue che rispetto agli angoli, un triangolo può essere *rettangolo*, *ottusangolo*, o *acutangolo*.

Nel triangolo rettangolo il lato opposto all' angolo retto dicesi *ipotenusa*; gli altri due si chiamano *cateti*.

La denominazione di triangolo *obbliquangolo* comprende il triangolo ottusangolo, e l' acutangolo.

PROPOSIZIONE XVIII — *TEOREMA*.

68. *In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali* (fig. 21).

Dim. Nel triangolo isoscele *AFB* sia il lato *FA=FB*; dico che sarà l' angolo *A=B*.

Si divida l' angolo *AFB* in due parti uguali. I due triangoli *AFE,FEB* sono uguali, perchè hanno l' angolo *AFE* uguale all' angolo *EFB*, e sono uguali i lati, che comprendono i detti angoli, onde (n.° 58) sarà l' angolo *A=B. C.D.D.*

69. *Corollario.* Dall' uguaglianza de' medesimi triangoli si deduce che il lato *AE=EB*, e che l' angolo *AEF=FEB*, onde questi due angoli sono retti: e però « in un triangolo isoscele, » la linea *FE*, che divide l' *angolo al vertice AFB* in due » parti uguali, è perpendicolare alla *base AB*, e passa pel suo » punto di mezzo *E*.

PROPOSIZIONE XIX — *TEOREMA*.

70. *Se in un triangolo due angoli sono uguali, i lati opposti saranno uguali* (fig. 21).

Dim. Nel triangolo *AFB* sia l' angolo *A=B;* dico che sarà il lato *AF=FB*.

Dal punto *F* si conduca la perpendicolare *FE* sopra *AB*.

Nè triangoli *AFE,FEB* il lato *FE* è comune, l'angolo *A=B* per ipotesi, l' angolo *FEA=FEB* come retti, dunque sarà il

terzo angolo *AFE* uguale al terzo angolo *BFE* (n.° 67) ; per conseguenza i duo triangoli saranno uguali (n.° 54) , onde sarà *FA=FB*. *C.D.D.*

71. *Corollario* I. Da questo teorema si deduce che la perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo isoscele sopra la base, divide l'angolo al vertice in due parti uguali , e passa pel punto di mezzo della base medesima.

72. *Corollario* II. Ne risulta ancora che un triangolo equilatero è nel tempo stesso *equiangolo*, e reciproeamente un triangolo equiangolo è sempre equilatero. Ed il triangolo equilatero avendo i tre angoli eguali fra loro, eiascuno di essi equivarrà a due terzi di un angolo retto (n.° 66).

PROPOSIZIONE XX — *TEOREMA*.

73. *Di due angoli di un triangolo il maggiore è quello , che trovasi opposto ad un lato maggiore* (fig. 22).

Dim. Nel triangolo *ABC* sia il lato *CB* maggiore del lato *CA* ; dico ehe sarà l'angolo *CAB* maggiore dell' angolo *CBA*.

Sul lato *CB* si prenda una parte *CD* uguale al lato *CA* , e si tiri la retta *DA*. Essendo isoscele il triangolo *CAD* , sarà l' angolo *CAD* uguale all'angolo *CDA* (n.° 68). Ma l'angolo *CDA* esterno al triangolo *DBA* è maggiore dell' angolo interno ed opposto *ABD* (n.° 67) , dunque sarà ancora l' angolo *CAD* maggiore dell' angolo *ABD* , e a più forte ragione lo sarà l' angolo *CAB*. Dunque l'angolo *CAB* è maggiore dell'angolo *CBA*. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XXI — *TEOREMA*.

74. *Reciprocamente di due lati di un triangolo il maggiore è quello , che trovasi opposto ad un angolo maggiore* (fig. 22).

Dim. Nel triangolo *ABC* sia l'angolo *CAB* maggiore dell' angolo *CBA;* dico eho sarà il lato *CB* maggiore del lato *CA*.

Imperoechè se il lato *CB* non è maggiore del lato *CA* , sarà o uguale , o minore ; e nell' uno , e nell' altro easo non sarebbe l' angolo *CAB* maggiore dell' angolo *CBA* , eontro la supposizione. Dunque il lato *CB* dev'esser maggiore del lato *CA*. *C.D.D.*

75. *Scolio*. Da quanto fin qui si è dimostrato intorno ai triangoli , si deducono alcune proprietà importanti delle rette perpendieolari , ed oblique.

1.° *Da un punto* A (fig. 23) *preso fuori di una retta* DC *non si può abbassare che una sola perpendicolare* AP *sopra* DC.

Poichè se *AB* fosse un' altra perpendicolare, nel triangolo *ABP* vi sarebbero due angoli retti ; il che è assurdo (n.° 67).

2.° *La perpendicolare* AP *è più corta di ogni obliqua* AB, AC, AD, ecc.

In fatti, nel triangolo *ABP* l'angolo *APB* è retto; e però sarà acuto l'angolo *ABP*, onde il lato *AP* dev'esser minore del lato *AB* (n.° 74). Nello stesso modo dimostrasi che *AP* è minore di qualunque altra obliqua; e però

La perpendicolare AP *misura la distanza del punto* A *dalla retta* DC.

3.° Se si suppone $BP=PC$, le oblique AB, AC saranno uguali, perchè allora risultano uguali i due triangoli *ABP*, *APC*, onde

Le oblique che si discostano ugualmente dal piede P *della perpendicolare sono uguali.*

Reciprocamente se $AB=AC$, sarà $BP=PC$. In fatti essendo isoscele il triangolo *ABC* risulterà l'angolo *ABC* uguale all'angolo *ACB*, e però i due triangoli *ABP*, *APC* avranno uguali questi angoli, ed anche gli angoli in *P*, perchè retti, e sarà il terzo angolo *BAP* del primo uguale al terzo angolo *PAC* del secondo: onde i suddetti triangoli saranno uguali (n.° 54), e quindi $BP=PC$.

4.° Nel triangolo *ADB* l'angolo ottuso *ABD* è maggiore dell'acuto *ADB*, onde il lato *AD* è maggiore del lato *AB*. Da ciò ne segue che *di due oblique quella che più si allontana dal piede della perpendicolare sarà la più lunga.*

5.° Da un medesimo punto non si possono condurre sopra una retta data più di due rette uguali.

CAPITOLO IV.

DE' POLIGONI.

76. Un piano terminato d'ogni intorno da linee chiamasi *figura piana*. Se le linee sono rette, la figura si dirà *piana rettilinea*, o più brevemente *poligono*. Se le linee sono curve, la figura si dirà *curvilinea*; finalmente se le linee sono rette e curve, la figura si chiamerà *mistilinea*. L'insieme delle linee, o de' *lati* della figura rettilinea forma ciò che dicesi *contorno* o *perimetro* del poligono.

Se i lati del poligono sono uguali, esso dicesi *equilatero*; se sono uguali gli angoli, appellasi *equiangolo*.

77. Due poligoni diconsi essere *equilateri fra loro*, se hanno i loro lati respettivamente uguali, e disposti nel medesimo ordine.

Sono poi *equiangoli fra loro*, se hanno gli angoli respettivamente uguali, e disposti nel medesimo ordine.

78. Il poligono di tre lati è il triangolo, di cui si è parlato nel capitolo precedente; quello di quattro lati chiamasi *quadrilatero*, quello di cinque, *pentagono*, di sei, *esagono*, di sette, *ettagono*, di otto, *ottagono*, di dieci, *decagono*, di dodici, *dodecagono*, di quindici, *quindecagono* o *pentedecagono*.

79. Tra i quadrilateri si distinguono:

1.° Il *quadrato*, che ha i lati uguali, e gli angoli retti:

2.° Il *rettangolo*, che ha gli angoli retti senza avere i lati uguali.

3.° Il *parallelogrammo*, che ha i lati opposti paralleli.

4.° Il *rombo*, che ha i lati uguali senza avere gli angoli retti. Si dà ancora a questa figura il nome di *losanga*.

5.° Finalmente il *trapezio*, di cui due lati soltanto sono paralleli (*).

80. *Diagonale* di un poligono è la retta, che unisce i vertici di due angoli non adiacenti.

PROPOSIZIONE XXII — *TEOREMA*.

81. *La somma di tutti gli angoli interni di un poligono è eguale a tante volte due angoli retti quante unità sono nel numero de' suoi lati meno due* (fig. 24).

Dim. Sia *ABCDG* il poligono proposto: se dal vertice d'un medesimo angolo *A* si conducano a tutti i vertici degli angoli opposti le diagonali *AC*,*AD*,*AE*,*AF*, è manifesto che il poligono sarà diviso in cinque triangoli, se ha sette lati; in sei triangoli, se ha otto lati; ed in generale in tanti triangoli quanti sono i lati del poligono meno due; poichè questi triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto *A*, e per basi i differenti lati de' poligoni, eccetto i due, che formano l'angolo *A*. Ora la somma degli angoli di tutti questi triangoli non differisce dalla somma degli angoli del poligono; dunque questa somma è uguale a tante volte due angoli retti quanti sono i triangoli, vale a dire quante unità sono nel numero de' lati del poligono meno due. *C.D.D.*

(*) Euclide chiama *Trapezio* ogni quadrilatero che non è parallelogrammo, ma poi non adopera mai questo vocabolo, servendosi in tutto il corso dell' opera del nome generico di quadrilatero. Alcuni commentatori del Greco Geometra osservarono ch' era necessario distinguere con un nome particolare il quadrilatero di cui due soli lati sono paralleli, essendo questa figura dotata di proprietà importanti, onde la chiamarono *Trapezoide;* ma questa denominazione non è stata adottata, e si è dato il nome di trapezio esclusivamente alla figura di cui si parla. E in questo senso appunto che la voce *trapezio* trovasi adoperata dai grandi geometri che hanno scritto i trattati di Geodesia, e di Meccanica secondo lo stato attuale delle scienze esatte, come *Puissant*, *Venturoli*, *Poisson*, *Prony*, *Francoeur*, *Navier*, ecc.; laonde noi abbiamo definito il trapezio nel significato dei moderni, e non in quello di Euclide, dapoichè sono i sommi scrittori delle parti elevate delle matematiche pure e miste che danno la legge ai facitori di elementi, dovendo questi servire principalmente per intendere le opere classiche che sono scritte nella lingua viva dei moderni, e non già nella lingua morta degli antichi.

82. *Scolio*. Da questo teorema si deduce che la somma degli angoli di un quadrilatero è uguale a quattro angoli retti. Dunque se tutti gli angoli di un quadrilatero sono uguali, ciascuno di essi sarà un angolo retto; il che serve a giustificare ciò che si è detto nel n.° 79, dove si è supposto che i quattro angoli di un quadrilatero fossero retti, nel caso del rettangolo, e del quadrato. Merita ancora di essere osservato che il teorema precedente può essere applicato al poligono *ABCFG* (fig. 28) che ha un angolo *rientrante* in *E*; ma in tal caso si dovrà considerare l'angolo accennato come maggiore di due angoli retti. Noi ci occuperemo soltanto dei poligoni che hanno gli angoli *salienti*, come è quello della fig. 24, e che si chiamano *poligoni convessi*. Il perimetro del *poligono convesso* è tale che non può essere segato dai prolungamenti dei suoi lati, mentrechè quello del *poligono concavo* può essere segato in due o più punti quando si prolunghi qualche suo lato sufficientemente.

PROPOSIZIONE XXIII — *TEOREMA*.

83. *I lati opposti d'un parallelogrammo sono uguali, come pure gli angoli opposti* (fig. 25).

Dim. Nel parallelogrammo *ABCD* si conduca la diagonale *BD*. Essendo *AD* parallela a *BC*, saranno uguali gli angoli alterni *ADB,DBC*: similmente essendo *DC* parallela ad *AB*, saranno uguali gli angoli alterni *ABD,CDB*. Quindi i due triangoli *ABD,BDC* hanno il lato *BD* comune, e gli angoli adiacenti a questo lato respettivamente uguali, e però sono uguali. Da ciò ne segue che il lato *AD* è uguale al lato *BC*, il lato $AB=DC$, e l'angolo $A=C$. È poi l'angolo *ABC* composto de' due angoli *ABD,DBC*, che sono respettivamente uguali agli angoli *BDC,ADB*, dunque sarà ancora l'angolo $ABC=ADC$. *C.D.D.*

84. *Corollario*. Si deduce da questo teorema che due parallele *AB,CD* comprese tra due altre parallele *AD,BC*, sono uguali; e che la diagonale *BD* divide il parallelogrammo *ABCD* in due triangoli uguali. Reciprocamente se due rette *AB,CD* sono uguali e parallele, le congiungenti *AD,BC* dalle medesime parti sono ancor esse uguali e parallele. Infatti, essendo uguali gli angoli alterni *ABD,BDC* sarà il triangolo *ABD* uguale al triangolo *BDC* (n.° 53); e però ne risulta non solamente che le rette *AD,BC* sono uguali, ma ancora che sono parallele, poichè sono uguali gli angoli alterni *ADB,DBC*. Se dunque in un quadrilatero due lati opposti sono uguali e paralleli, gli altri due saranno ancora uguali e paralleli, e la figura sarà un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXIV — *TEOREMA.*

85. *Se in un quadrilatero i lati opposti sono uguali, la figura sarà un parallelogrammo* (fig. 25).

Dim. Nel quadrilatero $ABCD$, sia il lato $AB=DC$, il lato $AD=BC$; dico che la figura $ABCD$ è un parallelogrammo.

Imperocchè conducendo la diagonale BD, i due triangoli ABD, BDC saranno uguali, perchè hanno i tre lati respettivamente uguali; dunque l'angolo ADB opposto al lato AB è uguale all'angolo DBC opposto al lato CD: ma questi angoli sono alterni rispetto alle rette AD,BC, dunque queste rette sono parallele (n.° 46). Nello stesso modo dimostrasi che AB è parallela a CD; dunque il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo. $C.D.D.$

PROPOSIZIONE XXV — *TEOREMA.*

86. *Le diagonali d'un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in parti uguali* (fig. 26).

Dim. Sia il parallelogrammo $ABCD$; dico che le due diagonali AC,BD si tagliano scambievolmente in parti nguali.

In fatti, paragonando il triangolo ADO col triangolo COB, si trova il lato $AD=CB$, l'angolo $ADO=CBO$, come alterni rispetto alle parallele AD,CB, e l'angolo $DAO=OCB$ per la stessa ragione; dunque i due triangoli ADO,BOC sono uguali (n.° 54); e perciò sarà $AO=OC$, e $DO=OB$. $C.D.D.$

PROPOSIZIONE XXVI — *PROBLEMA.*

87. *Costruire un parallelogrammo, essendo dati un angolo, e i due lati che lo comprendono* (fig. 27).

Soluzione. Si faccia l'angolo A uguale all'angolo dato; poi su i lati di esso si prendano le due parti AB,AC uguali respettivamente ai due lati dati. Fatto centro in C, e con un raggio uguale ad AB si descriva una circonferenza; fatto centro in B, e con un raggio uguale ad AC si descriva un'altra circonferenza, che incontri la prima nel punto D; e si tirino le rette DC,DB, la figura $ABDC$ sarà il parallelogrammo richiesto.

Imperocchè, per la costruzione, i lati opposti essendo uguali, il quadrilatero descritto dev'essere un parallelogrammo (n.° 85); ma questo parallelogrammo è formato con i lati dati e l'angolo dato; dunquo si è fatto quello che si cercava.

88. *Scolio.* Si osservi che se l'angolo CAB è retto, la figura $ABCD$ diviene un rettangolo; e se di più i lati AB,AC sono uguali, la stessa figura diverrà un quadrato. Si può dunque colla

costruzione indicata descrivere un rettangolo, di cui sian dati due lati che comprendono l'angolo retto, e costruire un quadrato sopra una retta data.

CAPITOLO V.

TEORICA DELLE RAGIONI, E DELLE PROPORZIONI; APPLICAZIONE DI QUESTA DOTTRINA ALLE FIGURE PIANE RETTILINEE.

89. Il principio dell'*esatta sovrapposizione* (n.° 31), applicato ai triangoli, e le conseguenze che ne abbiamo dedotte, sono state sufficienti a farci scoprire alcune proprietà delle figure piane, proprietà che si potrebbero chiamare *costitutive* delle figure medesime, in quanto che servono alla loro descrizione geometrica. In tal modo abbiam conosciuto la possibilità di descrivere il quadrato, il rettangolo, il parallelogrammo, ec. Ma quando si vogliono paragonare generalmente le stesse figure fra loro, per valutare le une per mezzo delle altre, allora il principio summentovato dell'esatto sovrapponimento non basta più esso solo, sotto qualunque siasi forma, o remota sua applicazione si consideri; e però si richiede che la scienza venga rafforzata da qualche mezzo più potente. Questo mezzo ritrovasi nella teorica generale delle *ragioni*, e delle *proporzioni*, che andiamo ad esporre qui appresso.

90. *Delle ragioni*, *e delle proporzioni in generale.*

Due grandezze non possono paragonarsi una all'altra rispetto alla loro quantità se non sono *omogenee*, vale a dire della stessa specie o natura; così una linea non potrà paragonarsi ad una superficie o ad un solido, ma si paragonerà la linea alla linea, la superficie alla superficie, il solido al solido. Di due grandezze omogenee la minore moltiplicata quanto basta deve alla fine superare la maggiore; e questa proprietà appartenendo esclusivamente alle grandezze omogenee, è stata con ragione da alcuni matematici adottata per carattere distintivo di quelle grandezze.

91. Una grandezza minore si chiama *parte aliquota* di una grandezza maggiore, allorchè la minore può esser contenuta un certo numero di volte esattamente nella maggiore: viceversa la maggiore si dirà *moltiplice* della minore, quando la prima contiene esattamente la seconda.

92. S'intende per *comune misura* di due grandezze omogenee una terza grandezza omogenea con le prime due ed aliquota di ciascuna di esse.

Se dunque una grandezza D è una comune misura di due altre grandezze A e B, ogni parte aliquota di D sarà eziandio una comune misura di A e B. Inoltre se D è comune misura di A, e di una sua parte, lo sarà ancora della rimanente parte.

93. Due grandezze omogenee si dicono *commensurabili* tra loro, quando hanno una comune misura. Tali sono tutti i numeri interi, e fratti. Al contrario si chiamano *incommensurabili*, allorchè non hanno una comune misura. Appartengono a questa specie di grandezze le radici quadrate de' numeri, che non sono quadrati perfetti, come le radici di 2, di 3, di 5, di 8, di 12 ec. Tale è parimente la diagonale di un quadrato rispetto al suo lato, e molte altre linee, delle quali tratta Euclide nel lib. X de' suoi Elementi.

94 La *ragione*, o il *rapporto* di due grandezze omogenee A e B è il quoziente, che si ottiene dividendo l'una per l'altra. Così, la ragione di 30 a 6 è 5, perchè 5 è il quoziente di 30 diviso per 6. Reciprocamente il rapporto di 6 a 30 è $\frac{1}{5}$; ed in generale quello di A a B sarà $A : B$, oppure $\frac{A}{B}$.

95. Da ciò si deduce che una ragione non cangia, se si moltiplicano, o si dividono i suoi due termini per un medesimo numero. Infatti, essendo la ragione il quoziente di una divisione può sempre esser posta sotto una forma frazionaria. Quindi la ragione di 30 : 6 è la stessa che quella di 60 : 12; ed in generale la ragione di $A : B$ è quanto quella di $nA : nB$, indicando con n un numero qualunque.

96. Ne risulta ancora che

1.° Le grandezze che hanno la stessa ragione ad una sola e medesima grandezza od a grandezze uguali, sono uguali fra loro.

2.° Le grandezze uguali hanno una stessa ragione ad una sola e medesima grandezza.

3.° Le grandezze alle quali una sola e medesima grandezza ha una stessa ragione, sono uguali.

4.° Se due grandezze si paragonano ad una terza, la maggiore sarà quella che vi avrà una maggiore ragione, e viceversa.

5.° Le ragioni uguali ad una stessa ragione, o a ragioni uguali, sono uguali tra loro.

97. Il primo termine di una ragione chiamasi *antecedente*, il secondo, *conseguente*.

98. *Ragione inversa*, o *reciproca* dicesi quella che il conseguente serba al suo antecedente. Così, la ragione inversa di 3 a 6 è quella di 6 a 3.

99. Dicesi *proporzione* l'uguaglianza di due ragioni.
Così, essendo 2 il rapporto di 20 a 10, come pure di 12 a 6, i numeri 20, 10, 12 e 6 formeranno una proporzione, che s'indica in questo modo; 20 : 10 :: 12 : 6, e si enuncia dicendo 20 *sta a* 10 *come* 12 *sta a* 6. In generale se quattro grandezze A,B,C,D sono in proporzione, si scriverà per indicarla

$$A : B :: C : D.$$

100. Dunque in una proporzione esistono quattro termini, cioè due *antecedenti* A e C, e due *conseguenti* B, D. I termini A

e D diconsi *termini estremi*; B, e C sono i *termini medii*. L'ultimo termine D chiamasi *quarto proporzionale*.

101. Se quattro grandezze A,B,C,D formano una proporzione nell'ordine in cui sono nominate, cioè se sta $A : B :: C : D$, si dirà che A sta a B in *ragion diretta* di C a D; ma se sta $A : B :: D : C$, allora si dirà che A sta a B in *ragione inversa* di C a D. Così, i numeri 7 e 14 sono in ragione inversa, oppure sono *inversamente proporzionali* ai numeri 12 e 6; poichè volendo stabilire fra essi la proporzione, convien fare una inversione ne' termini della seconda ragione, cioè mettere il conseguente 6 in luogo dell'antecedente 12, e scrivere $7 : 14 :: 6 : 12$; nè la proporzione avrebbe potuto sussistere altrimenti.

102. La proporzione si dice *continua*, allorchè i due termini medii sono uguali, come sarebbe $8 : 4 :: 4 : 2$, ed in generale $A : B :: B : C$.

E poichè la proporzione continua consiste propriamente in tre termini, è addivenuto che si scrive anche in questo modo; $\div A : B : C$; quindi il secondo termine B si è detto *medio proporzionale*, e l'ultimo C, *terzo proporzionale*.

103. Dalla definizione della proporzione si deduce che

1.° Se due proporzioni abbiano tre termini comuni, cioè abbiano i due antecedenti, ed il primo o il secondo conseguente; oppure i due conseguenti, ed il primo, o il secondo antecedente, rispettivamente uguali, i due termini rimanenti saranno uguali tra loro.

2.° Se in una proporzione i conseguenti sono uguali, saranno pure uguali gli antecedenti; ed inversamente se sono uguali gli antecedenti, saranno ancora uguali i conseguenti.

PROPOSIZIONE XXVII — *TEOREMA*.

104. *Se quattro grandezze* A,B,C,D *sono proporzionali, cioè sia* A : B :: C : D, *il prodotto* $A \times D$ *de' termini estremi sarà uguale a quello* $B \times C$ *de' termini medii.*

Dim. Perocchè essendo la ragione di A a B uguale a quella di C a D, saranno uguali tra loro le due frazioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$. Ma quando due frazioni uguali si riducono allo stesso denominatore, i numeratori delle nuove frazioni sono uguali: se dunque si riducono le due frazioni accennate allo stesso denominatore, i numeratori $A \times D$, e $B \times C$, che ne risulteranno, saranno uguali, onde il prodotto de' termini estremi sarà uguale a quello de' termini medii. *C.D.D.*

105. *Scolio.* Inversamente se quattro grandezze A,B,C,D sono tali che il prodotto $A \times D$ delle due estreme è uguale a quello $B \times C$ delle due medie, i fattori del primo prodotto sa-

ranno *reciprocamente proporzionali* a quelli del secondo, in guisa che si avrà $A : B :: C : D$.

Si deve inoltre avvertire che nella proporzione continua $A:B::B:C$, il prodotto de' termini estremi $A \times C$ è parimente uguale a quello de' termini medii $B \times B$; ma il prodotto di due fattori uguali essendosi chiamato *quadrato*, così si dice che « nella proporzione » continua il prodotto dei termini estremi è uguale al quadrato » del termine medio.

In vece di $B \times B$ si scrive per brevità B^2, che si pronunzia dicendo *B due*, oppure *B quadrato*. La cifra 2 serve ad indicare il numero de' fattori uguali.

106. *Corollario* I. Si deduce dal teorema precedente che senza alterare la proporzione $A : B :: C : D$ si può dare una diversa disposizione ai suoi termini, purchè si conservi il prodotto degli estremi eguale a quello de' medii. Così si potranno mettere i conseguenti in luogo degli antecedenti scrivendo $B : A :: D : C$, perchè anche in questa proporzione si verifica $B \times C = A \times D$. Un tal cambiamento di termini è stato chiamato, *invertendo*.

Si potranno anche paragonare gli antecedenti fra loro ed i conseguenti fra loro, ciò che dicesi *permutando*, e sarà $A : C :: B : D$; e qui pure $A \times D = C \times B$.

107. *Corollario* II. La proporzione $A : B :: C : D$ non si altera, se si moltiplicano, o si dividono per un medesimo numero i due antecedenti, o i due conseguenti. In fatti, permutando si avrà $A : C :: B : D$. Ma la ragione di A a C non cangia, allorchè si moltiplicano, o si dividono per lo stesso numero n i suoi termini, dunque sarà $nA : nC :: B : D$, e permutando di nuovo sarà infine $nA : B :: nC : D$. Similmente si dimostra, che $\frac{A}{n} : B :: \frac{C}{n} : D$; ed è facile applicare ai conseguenti ciò che qui si dice degli antecedenti.

PROPOSIZIONE XXVIII — *TEOREMA*.

108. *Se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti saranno fra loro respettivamente proporzionali.*

Dim. Siano le due proporzioni

$$A : B :: C : D, \text{ ed } A : E :: C : F,$$

sarà permutando

$$A : C :: B : D, \text{ ed } A : C :: E : F.$$

Dunque la ragione di A a C sarà uguale tanto alla ragione di B a D, quanto a quella di E a F; e però la ragione di B a D sarà uguale a quella di E a F, onde si avrà

$$B : D :: E : F. \text{ C.D.D.}$$

109. *Corollario*. E poichè invertendo, i conseguenti divengono

antecedenti, perciò se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti saranno in proporzione (*).

PROPOSIZIONE XXIX — *TEOREMA*.

110. *Se quattro grandezze* A,B,C,D *sono proporzionali, cioè sia* A : B :: C : D, *sarà componendo* A + B : B :: C + D : D, *e dividendo* A — B : B :: C — D : D.

Dim. Nella dimostrazione di questo teorema si suppone che gli antecedenti A e C siano maggiori de' conseguenti B e D; poichè se fosse altrimenti si farebbe prima l' invertendo, e si considererebbero come antecedenti i termini B e D. Ciò premesso,

I. Essendo la ragione di A a B espressa dalla frazione $\frac{A}{B}$, e la ragione di C a D dalla frazione $\frac{C}{D}$, se si aggiunga ad ambedue l' unità, sarà $\frac{A}{B}+1$ uguale a $\frac{C}{D}+1$. Ora è evidente che $\frac{A}{B}+1$ equivale ad $\frac{A}{B}+\frac{B}{B}$, poichè ogni grandezza divisa per se stessa deve dare l'unità; parimente $\frac{C}{D}+1$ equivale a $\frac{C}{D}+\frac{D}{D}$: se dunque si faccia la somma delle due prime frazioni, e quella delle due seconde, sarà $\frac{A+B}{B}$ uguale a $\frac{C+D}{D}$, vale a dire che la ragione di $A+B$ a B è uguale alla ragione di $C+D$ a D, onde si avrà $A+B : B :: C+D : D$.

II. Se in vece di aggiungere si sottragga l' unità dalle due frazioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$; indi in luogo della somma si faccia la sottrazione delle frazioni, che ne risultano, si avrà $\frac{A-B}{B}$ uguale a $\frac{C-D}{D}$, vale a dire $A-B : B :: C-D : D$. C.D.D.

111. *Corollario* I. Essendo nelle due proporzioni $A : B :: C : D$, ed $A+B : B :: C+D : D$ i conseguenti uguali, gli antecedenti formeranno una nuova proporzione (n.° 109), onde si avrà

$$A+B : A :: C+D : C.$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$A-B : A :: C-D : C.$$

Dunque in generale si può concludere che « in ogni proporzione

(*) Riducesi al teorema precedente la *proporzione ordinata* di Euclide, ed il ragionamento per *equalità ordinata*. Ma queste espressioni antiquate sono state proscritte dalla scienza, insieme a diverse altre dello stesso conio.

» la somma, o la differenza de' termini del primo rapporto sta
» all'antecedente, o al conseguente di tal rapporto, come la
» somma, o la differenza de' termini del secondo rapporto sta all'an-
» tecedente, o al conseguente del rapporto medesimo.

112. *Corollario* II. Dalla proporzione $A : B :: C : D$ si ha permutando $A : C :: B : D$. Se a questa si applichi il *componendo*, ed il *dividendo*, si avrà $A+C : C :: B+D : D$, ed $A-C : C :: B-D : D$, ovvero *permutando*

$$A+C : B+D :: C : D \text{ ed } A-C : B-D :: C : D.$$

Da ciò si può concludere che « in ogni proporzione la somma,
» o la differenza degli antecedenti sta alla somma, o alla diffe-
» renza de' conseguenti come uno degli antecedenti al suo con-
» seguente.

113. *Corollario*. È facile ora vedere che se si ha una serie di rapporti uguali, cioè

$$A : B :: C : D :: E : F :: G : H; \text{ ecc.}$$

« la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i con-
» seguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente.

Infatti, considerando solamente i due primi rapporti, si avrà la proporzione $A : B :: C : D$, dalla quale si deduce

$$A+C : B+D :: A : B,$$

e poichè il terzo rapporto $E : F$ è uguale al primo $A : B$, si avrà

$$A+C : B+D :: E : F.$$

Se si faccia la somma degli antecedenti e quella de' conseguenti in quest' ultima proporzione, ne risulterà

$$A+C+E : B+D+F :: E : F, \text{ o } :: A : B; \text{ e così in progresso.}$$

PROPOSIZIONE XXX — *TEOREMA*.

114. ***Se i termini di una proporzione si moltiplicano per i termini corrispondenti di un' altra, i quattro prodotti, che ne risultano, formeranno una nuova proporzione.***

Dim. Siano le due proporzioni

$$A : B :: C : D, \text{ ed } E : F :: G : H.$$

Siccome una ragione non si altera, allorchè i suoi termini si moltiplicano per un medesimo numero (n.° 95), così la prima proporzione può prendere la seguente forma

$$A\times E : B\times E :: C\times G : D\times G. \quad \ldots\ldots\ldots \; (1).$$

Similmente la seconda proporzione diviene

$$B\times E : B\times F :: D\times G : D\times H,$$

ovvero invertendo

$$B\times F : B\times E :: D\times H : D\times G, \quad \ldots\ldots\ldots \; (2).$$

Ora le proporzioni (1), e (2) hanno i medesimi conseguenti, dunque gli antecedenti saranno in proporzione (n.° 109); e perciò si avrà

$$A\times E : B\times F :: C\times G : D\times H. \; C.D.D.$$

115. *Corollario.* Se la seconda proporzione fosse identica alla prima, la proporzione risultante sarebbe

$$A{\times}A : B{\times}B :: C{\times}C : D{\times}D,$$

ovvero

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2.$$

quindi ne risulta che « se quattro grandezze sono in proporzio- « ne, i loro quadrati formeranno una nuova proporzione. »

Viceversa « se quattro grandezze sono in proporzione, le loro » radici quadrate saranno ancora in proporzione. »

Tutto ciò può estendersi ai cubi, ed alle radici cubiche. Imperocchè il cubo di un numero non è altro che il prodotto di questo numero pel suo quadrato. Così, 8 è il cubo di 2, 27 è il cubo di 3, 125 quello di 5, ecc.

116. *Scolio.* La ragione, che ha per antecedente il prodotto degli antecedenti di due, o di più ragioni, e per conseguente il prodotto de' conseguenti delle stesse ragioni, dicesi *composta.* In particolare si dice *duplicata* quella che ha luogo tra i quadrati, e *triplicata* quella ch' esiste tra i cubi. In fatti, essendo il quadrato di una quantità il prodotto di questa per se stessa, ed il cubo il prodotto del quadrato per la stessa quantità, è manifesto che la *ragione composta* dalle ragioni identiche di A a B, e di A a B sarà uguale alla ragione di $A{\times}A$ a $B{\times}B$, ossia del quadrato di A al quadrato di B, e così della triplicata.

Si deduce ancora che la ragione di A a B si compone dalla ragione di A a qualsivoglia altra quantità intermedia C, e dalla ragione di questa stessa C a B. Imperocchè la ragione che si compone dalle due suddette ragioni è quella di $A{\times}C$ a $C{\times}B$, ossia (n.° 95) quella di A a B. (*)

(*) La teorica delle ragioni, e delle proporzioni manca nelle più celebri istituzioni moderne di Geometria, perchè appartiene propriamente all'Aritmetica, o meglio all'Algebra, che considera i rapporti generali delle quantità. Noi ne abbiamo parlato, a solo fine di facilitare la lettura di questo Catechismo alle persone, che conoscono soltanto l'Aritmetica volgare. Non ostante giova sapere che alcuni non solamente si lamentano di una tale mancanza nelle istituzioni geometriche, ma sostengono ancora che la teorica accennata deve poggiar tutta sopra l'oscuro principio degli *equimoltiplici*, come trovasi nel lib. V degli Elementi di Euclide. Mettendo da parte che siffatto libro ha dato luogo a comenti e dispute senza fine, e che perciò niun matematico ha avuto il coraggio di prenderlo a modello nella esposizione delle ragioni e proporzioni, ci limiteremo a dire che il medesimo è scritto in una specie di linguaggio algebrico, perchè colle linee Euclido intendo indicare qualunque grandezza; e per conseguenza si può comprendere tutto il lib. V, senza sapere affatto di Geometria. Rimane quindi dimostrato che la teorica in quistione appartiene all'Aritmetica, ed all'Algebra. Per provare poi che una siffatta teorica può essere stabilita sopra principj diversi da quelli assunti da Euclide riporteremo qui appresso le definizioni della ragione date da Newton, e da Leibnizio, vale a dire da due fra i più grandi luminari delle ma-

Della misura, e del paragone delle aje de' poligoni.

117. *Misurare* una grandezza significa trovare il numero delle volte che essa contiene una grandezza della medesima specie, che per convenzione si prende per *unità di misura*. Un tal numero di unità convenute è la *misura* della grandezza; e paragonando poi la grandezza misurata a quella che la misura, il detto numero, considerato astrattamente, esprime la ragione che passa tra quelle due grandezze.

118. L'*aja*, o la superficie di un poligono sono vocaboli quasi sinonimi. Nondimeno l'aja dinota più particolarmente la quantità superficiale di una figura, in quanto ch'è misurata o paragonata ad altra superficie.

119. Il quadrato, che ha per lato l'unità di lunghezza, è stato scelto per *unità di superficie*. Quindi l'*aja* di un poligono si può esprimere in *palmi quadrati*, in *piedi quadrati*, in *canne quadrate*, ecc.

120. Si chiamano *figure equivalenti* quelle che hanno aje uguali. Due figure di forme differentissime possono essere equivalenti: così, un cerchio può essere equivalente ad un quadrato, un triangolo ad un parallelogrammo, ad un pentagono, ecc.

La denominazione di *figure uguali* sarà limitata a quelle che sovrapposte l'una all'altra coincidono in tutti i loro punti: tali sono due cerchi, di raggi uguali, due triangoli, di cui i lati sono respettivamente uguali, ecc. (*).

---

tematiche, a fine di distruggere, s'è possibile fra noi, alcuni pregiudizj di antica data.

« Per *Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abstractam quan-
» titatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quæ pro unitate
» habetur rationem intelligimus. Estque triplex; integer, fractus et sur-
» dus. Integer quem unitas metitur, fractus quem unitatis pars submul-
» tiplex metitur, et surdus cui unitas est incommensurabilis.

Newton Arith. Univers. pag. 2.

« Ratio est ea omogeneorum relatio, quæ determinat quantitatem unius
» ex quantitate alterius, sine tertio omogeneo assumpto.

Vedi l'Aritm. di Wolfio Cap. III.

Queste definizioni, come si vede, sono generali, cioè abbracciano non solo le grandezze commensurabili, ma anche le incommensurabili; ed entrambe si riducono a dire che la ragione di due grandezze omogenee è il quoziente che si ottiene dividendo l'una per l'altra. Ed è notabile che Newton non solo stabilisce che la ragione è un numero, ma la considera (per così dire) come il numero per eccellenza; dimodochè non possa aversi idea compiuta del numero senza che si abbia prima idea della ragione. Ora la teorica delle proporzioni non è che un corollario della definizione della ragione; per conseguenza si rende manifesto che Newton, e Leibnizio stimarono potersi stabilire la teorica accennata sopra principj diversi da quelli assunti da Euclide; ed in fatti Wolfio (luogo citato) dice espressamente che Leibnizio definì la ragione nel modo sopraddetto, perchè trovò difettosa quella datane dal geometra Greco.

(*) Il celebre Legendre è stato il primo ad introdurre questa distinzione negli Elementi di Geometria. Essa è stata adottata dai Geometri.

121. S'intende per *altezza* di un parallelogrammo la perpendicolare che misura la distanza di due lati opposti. Questi lati diconsi *basi* del parallelogrammo.

122. L'*altezza* d'un triangolo è la perpendicolare abbassata dal vertice d'un angolo sul lato opposto, e questo lato appellasi *base* del triangolo.

123. L'*altezza* di un trapezio è la perpendicolare che misura la distanza de' suoi due lati paralleli.

124. Prima di applicare la teorica delle ragioni, e delle proporzioni alle figure, è necessario di fare alcune osservazioni, a fine di stabilire il vero senso delle definizioni, e di dissipare ogni oscurità tanto nelle enunciazioni, quanto nelle dimostrazioni delle proposizioni.

La nozione del rapporto è facile a concepirsi ne' numeri, ma si potrebbe incontrare qualche difficoltà a concepirla nelle linee, soprattutto se queste sono incommensurabili. Ma l'oscurità svanisce, quando si rifletta che non si possono paragonare due linee tra loro, se non si suppongano riferite a una comune misura, e che in tal caso il loro rapporto è veramente un numero, o una frazione, di cui i termini sono espressi dai numeri delle misure comuni contenute in entrambe.

Abbenchè questa frazione non possa esprimersi esattamente nel caso del rapporto incommensurabile, pure essa esiste, poichè se ne può assegnare il valore con quell'approssimazione che si vuole; e due rapporti incommensurabili dovranno essere considerati come uguali, quando si proverà che spingendo l'approssimazione quanto si voglia i loro valori risultano sempre eguali. E si rifletta ancora che nelle dimostrazioni geometriche occorre soltanto di assicurarsi della uguaglianza di due rapporti, e non già di assegnare il loro preciso valore.

Le considerazioni precedenti si possono facilmente applicare alle proprietà delle proporzioni.

Quando quattro grandezze A, B, C, D sono proporzionali, in guisa che abbiasi $A:B::C:D$, si è dimostrato che il prodotto dei termini estremi $A\times D$ è uguale a quello dei medj $B\times C$. Questa verità non ammette dubbio per i numeri, essa non ne ammette ancora per qualsivogliano grandezze, poichè se A,B,C,D sono linee si può imaginare che una di queste quattro linee, o una quinta se si vuole, serva a tutte di comune misura, e sia presa per unità; allora A,B,C,D rappresentano ciascuna un certo numero d'unità, intero, o fratto, commensurabile, o incommensurabile, e così la proporzione tra le linee A,B,C,D diviene una proporzione di numeri.

Il prodotto delle linee A e D, che si chiama ancora il loro *rettangolo*, non esprime dunque altra cosa se non il numero delle unità lineari contenute in A, moltiplicato pel numero delle unità lineari contenute in D; e si concepisce facilmente che un

tal prodotto può e dev' essere uguale a quello che risulta similmente dalle linee B e C.

Le grandezze A e B possono essere di una specie, per esempio linee, e le grandezze C e D di un'altra specie, per esempio superficie; allora queste grandezze si devono sempre considerare come numeri: A e B si esprimeranno in unità lineari, C e D in unità superficiali; ed il prodotto $A \times D$ sarà un numero come il prodotto $B \times C$.

In generale, in tutte le operazioni che si faranno sulle proporzioni, bisogna sempre considerare i termini di queste proporzioni come altrettanti numeri, ciascuno della specie che gli conviene, e non si avrà alcuna difficoltà a concepire queste operazioni, e le conseguenze, che ne risultano (*).

PROPOSIZIONE XXXI — *TEOREMA*.

125. *L'aja del rettangolo* ACHE *ha per misura il prodotto della base per l'altezza* (fig. 29).

Dim. Supponiamo in primo luogo che l'altezza CA sia commensurabile colla base CH, e che il lato del quadrato, che serve qui come unità di superficie, sia contenuto 4 volte in AC, e 2 volte in CH. Dividendo CA in 4 parti uguali CB,BD,DF,FA, e CH nelle 2 parti uguali CN,NH, poi conducendo le rette BP,DK,FG parallele a CH, e NM parallela ad AC, è manifesto che il rettangolo $ACHE$ sarà diviso in 8 quadrati, ciascuno de' quali è uguale al *quadrato unità*. Perlochè resterà dimostrato che il prodotto delle unità lineari della base per quelle dell'altezza eguaglia il numero delle unità quadrate contenute nell'aja del rettangolo dato ed esprime perciò l'aja medesima.

Se l'altezza CA è incommensurabile colla base CH; dico che l'aja del rettangolo $ACHE$ avrà ancora per misura il prodotto della base per l'altezza. In fatti, s'è possibile, abbia per misura il prodotto della base CH per l'altezza CO minore di CA. Si divida la base CH continuamente per metà finchè si ottenga una parte CR minore di AO. Si tolga CR dall'altezza CA quante volte si può, resterà una parte AL minore di AO. Dal punto L si conduca LD parallela alla base CH, ne risulterà il rettangolo $LCHD$, di cui l'altezza CL è commensurabile colla base CH, perchè queste due linee hanno per comune misura la linea CR. Per conseguenza l'aja del rettangolo $LCHD$ avrà per misura il prodotto della base CH per l'altezza CL; ma per ipotesi l'aja del rettangolo $CAHE$ ha per misura il prodotto della base CH

(*) Vedi la Geometria del Lacroix pag. 35, e quella del Legendre pag. 61.

per l'altezza *CO*, dunque l'aja del rettangolo *LCHD* è maggiore dell'aja del rettangolo *CAHE*; il che è assurdo. Nello stesso modo si dimostrerà che l'aja del rettangolo *CAHE* non può avere per misura il prodotto della base *CH* per una retta maggiore dell'altezza *CA*, dunque deve avere per misura il prodotto della base per l'altezza. *C.D.D.* (*).

126. *Scolio.* Reciprocamente, qualsivoglia prodotto $A \times B$ di due linee *A* e *B* potrà considerarsi come la espressione dell'aja di un rettangolo *compreso*, o *contenuto* dalle linee medesime, vale a dire che abbia per base una di queste linee, e l'altra per altezza con l'avvertenza che ciascun fattore esprime unità lineari ed il prodotto esprime unità quadrate. Spesso in vece di dire *il rettangolo compreso*, o *contenuto dalle linee A* e *B*, si suol dire il *rettangolo della linea* A *nella linea B*; o più brevemente *il rettangolo di A* in *B*. Si avverta ancora che si chiamano *dimensioni* del rettangolo la sua base e la sua altezza. Il medesimo nome si attribuisce alla base, ed altezza di un parallelogrammo, o di un triangolo. Se dunque una delle dimensioni di un rettangolo è di 8 palmi, e l'altra di 6, l'aja del detto rettangolo sarà di 48 palmi quadrati.

127. *Corollario* I. L'aja del quadrato ha per misura il prodotto di un lato per se stesso. Quindi se *A* rappresenta un lato del quadrato, la sua aja sarà espressa da $A \times A$, ovvero A^2 : ed ecco perchè si è chiamato *quadrato* il prodotto di un numero per se stesso.

128. *Corollario* II. *Due rettangoli sono uguali, quando hanno basi uguali, ed altezze uguali.* Ciò è evidente.

129. *Corollario* III. *Due rettangoli sono equivalenti, quando hanno le basi in ragione reciproca delle altezze.*

In fatti, sia *A* la base, e *D* l'altezza del primo rettangolo, *B* la base, e *C* l'altezza del secondo, si avrà (n.° 101)

$$A : B :: C : D,$$

onde sarà $A \times D$, cioè l'aja del primo rettangolo, uguale a $B \times C$, che rappresenta l'aja del secondo.

Reciprocamente, *se due rettangoli sono equivalenti, le basi saranno in ragione reciproca delle altezze.* Perocchè essendo $A \times D$ uguale a $B \times C$, ne consegue (n.° 105) che deve aversi la proporzione

$$A : B :: C : D.$$

130. *Corollario* IV. *Due rettangoli che hanno la stessa base stanno tra loro come le altezze;* ed inversamente. In fatti dinotando con *A* la base, e con *B* e *D* le altezze, il rapporto di $A \times B$ ad $A \times D$ è uguale a quello di *B* a *D* (n.° 95). La reciproca è evidente.

(*) I principj su cui poggia la dimostrazione di questo teorema essendo stati attaccati in un opuscolo *anonimo* contro le moderne geometrie,

131. *Corollario* V. Finalmente è manifesto che *due rettangoli qualunque stanno tra loro come i prodotti delle basi per le altezze.*

---

stimiamo opportuno di fare alcune considerazioni, non per combattere autori mascherati, chè non ne varrebbe la pena, ma per dilucidare un importante punto di scienza a profitto della nostra gioventù studiosa.

1.° Nell' opuscolo accennato si sostiene che il rappresentare un rettangolo *per mezzo* del prodotto del numero delle unità lineari dello base pel numero delle unità lineari dell' altezza sia un errore, poichè (si soggiunge) secondo le regole dell' Aritmetica il prodotto di unità lineari per unità lineari non può esprimere che *una linea retta*, *e non un rettangolo*. Ma l' Aritmetica non ha dato mai simili regole spropositate, perchè tutti sanno che in una moltiplicazione il moltiplicatore deve sempre considerarsi come numero astratto, onde il prodotto di due quantità dello stesso genere, qual è quello di due linee rette, non avrebbe alcun significato se non si ricorresse a considerazioni e convenzioni dipendenti dalla natura del soggetto; ed ecco come Newton esprimesi intorno a ciò: « quamvis » linea utcunque multiplicata non possit evadere superficies, adeoque » hæc superficiei e lineis generatio longe alia sit a multiplicatione, in » hoc tamen conveniunt, quod *numerus unitatum in alterutra linea multiplicatus per numerum unitatum in altera producat abstractum numerum unitatum* in superficie lineis istis comprehensa, si modo unitas » superficialis definiatur, ut solet, quadratum cujus latera sunt unitates » lineares. Quemadmodum si recta *AB* constet quatuor unitatibus et *AC* » tribus, tum rectangulum *BC* constabit quater tribus seu duodecim unitatibus quadratis, ut inspicienti schema patebit (Arith. Univ. p. 4): Dunque secondo Newton, e la ragione, qualunque sia la linea presa per unità di misura lineare, purchè si prenda per unità di superficie il quadrato fatto sopra la linea medesima, il numero delle unità lineari contenute nella base di un rettangolo moltiplicato pel numero delle unità lineari contenuto nell' altezza esprimo non già una retta, come si afferma nell' opuscolo, ma bensì un numero astratto che dinota il rapporto dell' aja del rettangolo a quella del quadrato unità, vale a dire rappresenta la *misura* del rettangolo medesimo. E che altro vuol dire Euclide allorchè nella prop. 23 lib. 6 dimostra che i parallelogrammi equiangoli sono in ragion composta de' lati, se si prende per conseguente il rombo che ha per lato l' unità lineare? E forse la ragion composta altro che un numero astratto? Che se dopo tutto ciò gli autori, o l' autore dell' opuscolo non arrivano a comprendere perchè il Legendre dica che *il prodotto delle linee* A,B *non sia altro che il numero delle unità lineari contenute in* A *moltiplicato pel numero delle unità lineari contenute in* B, ne domandi ragione a Newton, ad Euclide, e non già ai moderni scrittori d' istituzioni geometriche, i quali non han fatto che seguire i dettami di quei sommi geometri, o per dir meglio quelli della ragione. Si può dunque conchiudere che quanto nel testo abbiamo detto intorno al prodotto di due linee trovasi al coperto di qualunque obbiezione, per cui passeremo ad una seconda considerazione.

2.° La distinzione delle grandezze in commensurabili ed incommensurabili, e propriamente il principio adottato qui sopra, onde dimostrare per assurdo il teorema nel caso dell' incommensurabilità, e del quale si fa un uso mirabile in molte proposizioni analoghe della moderna geometria, offre all' autore dell' opuscolo summentovato un altro soggetto di censura.

Una tale proposizione si enuncia talvolta dicendo: *due rettangoli stanno tra loro in ragione composta dalla ragione delle*

Applicando, per esempio, il suo ragionamento alla nostra figura, egli dice: *come si farà a prendere di* CH *una particella* CR *minore di* AO *che potrebbe ancora supporsi un infinitesimo dell' ordine* n? (!!!). *Ed in che maniera si farà ad ottenere quel residuo* AL? Ma in primo luogo come c' entrano qui gl' infinitesimi, se la differenza *AO* è, e deve considerarsi *una quantità assegnabile* per quanto piccola si voglia supporre? E poi chi non sa che un infinitesimo anche del semplice primo ordine è al di sotto di qualunque quantità data, e che due quantità debbono considerarsi uguali allorchè la loro differenza è infinitesima? Laonde il dire che due quantità differiscono per un infinitesimo equivale ad affermare la loro uguaglianza; e tutto ciò deriva immediatamente dalla definizione delle quantità infinitesime. « Finitæ enim quantitates, dice Boscovich, sunt eæ, quæ in se determinatæ sunt: infinitæ parvæ quantitates sunt eæ, quæ concipiuntur minui ad arbitrium ultra quoscunque limites in se determinatos. Porro contemptus quantitatum infinitesimarum in comparatione quantitatum finitarum nullum errorem parere potest ne infinitesimum quidem. Nam si illæ finitæ quantitates essent inæquales, haberent differentiam aliquam in se determinatam, etc. (Elem. Math. T. 1 p. 161) ».

L' errore dell' anonimo censore sta dunque nel credere che l' infinitesimo non consista in altro che in una quantità piccolissima; e per conseguenza la critica fatta al Legendre, e ad altri autori di Elementi geometrici nel caso della incommensurabilità si risolve in un accusa contro i principj fondamentali dell' analisi infinitesimale. Ma ciò ch' è più sorprendente, il nostro anonimo non si avvede che la sua inconcepibile difficoltà attacca puramente e semplicemente la stessa geometria degli antichi, che tanto esalta a spese' de' moderni! Infatti, Archimede dimostra che il cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo, di cui la base uguaglia la circonferenza, e l' altezza il raggio; e la dimostrazione riducesi a dire che se tra il cerchio, ed il triangolo si supponga esistere *una differenza*, siffatta supposizione condurrebbe ad un assurdo, che quel sommo Geometra rende manifesto con iscrivere e circoscrivere un poligono regolare che differisca dal cerchio *di una quantità minore della differenza accennata*. Ora questo stupendo giojello dell' antica geometria perderebbe tutto il suo splendore se si dovesse stare ai dettami dell' autore dell' opuscolo, poichè la differenza, di cui è parola, *potrebbe supporsi un infinitesimo dell' ordine* n, ed indi si potrebbe domandare come Archimede farà a descrivere un poligono che differisca dal cerchio di una quantità minore di un infinitesimo dell' ordine *n*? Nè vale il dire che il caso della misura del cerchio è diverso da quello della misura del rettangolo. Imperocchè, nell' ipotesi della incommensurabilità si è detto qui sopra che se il rettangolo *ACHE* non aveva per misura il prodotto della base *CH* per l' altezza *CA*, avrebbe dovuto avere per misura il prodotto della base *CH* per una linea *CO*, che si è supposta minore di *CA*, ossia si è supposto che *CO* differiva da *CA* per una quantità data *AO*; indi si è dimostrato l' assurdo di questa supposizione con togliere *CR* da *CA* tante volte quante si può, ossia con trovare una linea *CL* che differiva da *CA* per una quantità *AL* minore della differenza data *AO*. E non è questo lo stesso stessissimo procedimento di Archimede? Solamente nel caso del rettangolo il ragionamento si fa sulle linee rette, ed in quello del

basi, e dalla ragione delle altezze. Ciò si comprende facilmente dopo quanto si è detto (n.° 116) intorno alla ragione composta.

---

cerchio sulle superficie, ma il metodo è sempre lo stesso, cioè quello di *esaustione*, applicato al caso più semplice di misura superficiale. Che se qualcuno si rifiutasse all'evidenza delle nostre ragioni, legga e mediti il seguente passaggio del sullodato illustre Geometra Boscovich, e vedrà se il metodo di esaustione abbia un andamento diverso da quello da noi seguito nel dare la misura del rettangolo.

« Veteres multo longiore ambitu utebantur adhibentes methodum, quam » *exhaustionum* vocant. Concludebant singulas e binis quantitatibus com» parandis inter alias binas ad se invicem accedentes magis, quam pro » *quavis data differentia*, ac demonstrabant æqualitatem quantitatum con» cludentium inter se, tum inferebant propositarum æqualitatem pariter » inter se, reducendo semper demonstrationem ad absurdum.

Dunque pel caso della incommensurabilità i moderni geometri adoperano gli stessi principj rigorosi degli antichi; e però l'accusa fatta ai primi dall'autore dell'opuscolo, cioè di aver introdotto gl'*infinitesimi* negli elementi di Geometria, andrebbe a colpire anche i secondi! Infatti chi non sa che il divino Archimede ha fatto uso del metodo di esaustione non solo nella misura del cerchio, ma ancora ne' libri della sfera e del cilindro, ed in tutti gli altri mirabili suoi ritrovati? E che diremo del saggio Euclide, il quale anche prima di Archimede aveva dimostrato collo stesso metodo che i cerchi stanno come i quadrati de' diametri, che il cono è la terza parte del cilindro della stessa base e della stessa altezza, che le piramidi triangolari equialte stanno fra loro come le basi, ecc..? E da ciò non ne consegue evidentemente che l'accusa sovraccennata distruggerebbe non solo i teoremi di Archimede, ma ancora la Geometria solida di Euclide? (!!!).

3.° Finalmente rimangono ad esaminarsi le altre due difficoltà, delle quali si è fatta menzione nel principio di questa nota, e che sono dirette contro la Geometria del Legendre come il prototipo de' *novatori* moderni. Diciamo dunque che la prima difficoltà si riduce a negare al Legendre, ed a noi che ci troviamo nello stesso caso, che dividendosi una retta data *continuamente per metà* si possa giugnere ad un residuo minore di qualsivoglia retta data; ossia si riduce a negare la prop. 1 lib. 10 di Euclide, che al dire dell'illustre Brunacci è così evidente che può prendersi per assioma.

In quanto poi alla seconda difficoltà, essa non colpisce affatto il Legendre, ma colpisce noi soli: ed è cosa curiosissima che si faccia un accusa ad un autor classico senza averlo compreso, e che poi questa accusa vada a ferire un autore non ancora nato! Ma noi benchè accusati prima di nascere ci discolperemo facilmente. Infatti a che riducesi la difficoltà dell'anonimo? A quella di non poter concepire come essendo date due linee rette disuguali *CA*, *CR*, si possa togliere la minore *CR* dalla maggiore *CA* tante volte quante si può, o in altri termini si riduce a negare il nostro postulato 4.°, ch'è la prop. 3 lib. 1 di Euclide!!! In conclusione le difficoltà dell'autore dell'opuscolo conducono alle seguenti conseguenze: si dovrebbero proscrivere le misure dagli elementi di Geometria, e di più si dovrebbe dare a queste un significato che non si accenna, ma diverso sicuramente da quello ammesso da tutti i geometri, dapoichè nell'opuscolo si disapprova ciò che ha detto il Legendre, e per conseguenza Newton, ed Euclide, come abbiamo veduto più sopra.

Supponendo dunque che si abbiano due rettangoli A e B, e che il primo abbia la base di 3 unità, e l'altezza di 10, mentre la base del secondo è di 12 l'unità, e altezza di 7, si avrà $A : B :: 30 : 84$. Ora, se in vece dell'unità quadrata stabilita di sopra, si convenisse di prendere il rettangolo A per unità di misura delle superficie, è evidente che la misura del rettangolo B sarebbe espressa da $\frac{84}{30}$ di quella unità superficiale.

PROPOSIZIONE XXXII — *TEOREMA.*

132. *L'aja di un parallelogrammo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza* (fig. 30).

Dim. Sia il parallelogrammo $ABCD$; dico che la sua aja ha per misura il prodotto della base AB per l'altezza DE.

Si cali la perpendicolare CF sul prolungamento della base, ne risulterà il triangolo CBF, che sarà uguale al triangolo ADE. In fatti, il lato AD è uguale al lato BC per la proprietà del parallelogrammo, l'angolo AED è uguale all'angolo BFC perchè retti, l'angolo CBF è uguale all'angolo DAE in virtù delle parallele AD, BC, dunque sarà il terzo angolo ADE uguale al terzo augolo BCF; e però (n.° 54) saranno uguali i due triangoli ADE, BCF. Si aggiunga di comune il quadrilatero $EBCD$, risulterà il parallelogrammo $ABCD$ equivalente al rettangolo $EDCF$, che ha la stessa base DC, e la stessa altezza DE; e quindi la proposizione enunciata rimane dimostrata. *C.D.D.*

133. *Scolio.* È evidente che i corollarj III, IV, e V della proposizione precedente possono applicarsi ai parallelogrammi; e che *due parallelogrammi sono equivalenti quando hanno la stessa base, e la stessa altezza.*

PROPOSIZIONE XXXIII — *TEOREMA.*

134. *L'aja di un triangolo ha per misura il prodotto della sua base per la metà della sua altezza* (fig. 31).

Dim. Sia il triangolo ABC; dico che la sua aja si misura moltiplicando la base BC per la metà dell'altezza AD.

In secondo luogo si dovrebbe ammettere che i teoremi di Archimede, cioè la parte più meravigliosa dell'antica geometria, e quelli della geometria solida di Euclide sono dimostrati con gl'infinitesimi.

Finalmente si dovrebbero negare due proposizioni di Euclide, che sono in sostanza due assiomi, o due postulati se così si voglia!

In vista di queste conseguenze, non era miglior consiglio scrivere a dirittura contro la certezza della Geometria, come fecero Scaligero, ed Hobbes?

Dal punto A si conduca AE parallela a BC, e dal punto C la retta CE parallela ad AB. La figura $ABCE$ sarà un parallelogrammo, ch'è diviso dalla diagonale AC in due parti uguali; e però il triangolo ABC avrà per misura il prodotto della base BC per la metà dell'altezza AD. $C.D.D.$

135. *Scolio.* Tutto ciò che precedentemente abbiamo osservato intorno ai parallelogrammi, ha manifestamente ancora luogo per i triangoli.

PROPOSIZIONE XXXIV — *TEOREMA.*

136. *L'aja del trapezio* ABCD *ha per misura il prodotto dell'altezza* AF *per la retta* GE, *che congiunge i punti di mezzo de' lati non paralleli* (fig. 32).

Dim. Imperciocchè si conducano dai punti G, ed E le perpendicolari KP, HI ai lati paralleli AB, DC. I due triangoli EIC, EBH sono uguali, dapoichè il lato $BE = EC$, gli angoli IEC, BEH sono uguali come verticali, e gli angoli ICE, EBH sono uguali come alterni rispetto alle parallele DC, AH. Nello stesso modo si dimostrerà che il triangolo DGP è uguale al triangolo AGK. Quindi il trapezio $ABCD$ sarà equivalente al rettangolo $KPIH$. Ora essendo $KP = HI$, KG metà di KP, e HE metà di HI, ne risulta essere GE uguale e parallela a PI; e per conseguenza l'aja del trapezio $ABCD$ avrà per misura il prodotto di AF per GE. $C.D.D.$

137. *Scolio.* È facile vedere che GE è uguale alla semi-somma de' lati paralleli AB, CD, poichè essendo, per ciò che si è dimostrato, $DP + IC = KA + BH$, si avrà $DC + AB = PI + KH = 2GE$; in conseguenza « l'aja del trapezio ha ancora per misura il prodotto dell'altezza per la semi-somma de' lati paralleli. »

PROPOSIZIONE XXXV — *PROBLEMA.*

138. *Trasformare un poligono in un triangolo equivalente* (fig. 33).

Soluzione. Sia $ABCDE$ il poligono dato. Si conduca la diagonale CE, ed a questa la parallela DF, che incontri il lato AE prolungato in F, indi si tiri la retta CF. I due triangoli ECD, CEF sono equivalenti, perchè hanno la medesima base CE, e la medesima altezza, essendo racchiusi fra le stesse parallele CE, DF. Se dunque al triangolo ECD si sostituisce il triangolo CEF, il poligono $ABCDE$ verrà trasformato nel poligono equivalente $ABCF$, che ha un lato di meno. Applicando a questo poligono la costruzione precedente si avrà un triangolo equivalente al poligono proposto. È evidente che la stessa costruzione

può condurre a trasformare un poligono di un numero qualunque di lati in un triangolo equivalente.

139. *Scolio*. Si vede ora non solo la possibilità di misurare l'aja di un poligono di qualsivoglia numero di lati, ma ancora di paragonare tra loro le aje di due poligoni qualunque.

Delle linee rette proporzionali.

PROPOSIZIONE XXXVI — *TEOREMA.*

140. *Se nel triangolo* ABC *si conduca la retta* DE *parallela al lato* AC, *gli altri due lati saranno divisi in parti proporzionali* (fig. 34).

Dim. Nel quadrilatero $AEDC$ si conducano le diagonali AD, CE. I triangoli ADE, CED sono equivalenti, perchè hanno la stessa base ED, e la stessa altezza, essendo compresi fra le medesime parallele AC, DE; per conseguenza il triangolo BED avrà una uguale ragione ai due triangoli AED, EDC (n.° 96), vale a dire sarà

$$BED : AED :: BED : CED.$$

Ma la prima ragione è uguale a quella di BE ad EA, perchè i due triangoli BED, AED hanno la stessa altezza, e la seconda uguaglia quella di BD a DC, avendo i triangoli BED, CED anche la stessa altezza, dunque

$$BE : EA :: BD : DC,$$ ossia

i lati AB, BC sono divisi in parti proporzionali. *C.D.D.*

141. *Corollario*. Da questa proporzione si deduce *componendo* (n.° 110)

1.° $BE+EA : EA :: BD+DC : DC$, cioè $BA : EA :: BC : DC$;

2.° $BE+EA : BE :: BD+DC : BD$, ossia $BA : BE :: BC : BD$;

PROPOSIZIONE XXXVII — *TEOREMA.*

142. *Se i lati* BA, BC *sono divisi in parti proporzionali da una retta* DE, *questa sarà parallela al terzo lato* AC (fig. 34).

Dim. Essendo per ipotesi $BE : EA :: BD : DC$, sarà il triangolo BED al triangolo AED come lo stesso triangolo BED al triangolo CED, vale a dire si avrà

$$BED : AED :: BED : CED.$$

Perlochè essendo in questa proporzione uguali gli antecedenti, saranno ancora uguali i conseguenti; e perciò il triangolo AED sarà equivalente al triangolo CED. Ma questi due triangoli hanno la stessa base DE, dunque dovranno avere la stessa altezza, o che vale lo stesso, sarà DE parallela ad AC. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XXXVIII — *TEOREMA.*

143. *Se tra due rette* CB,EG *si conducano quante parallele si vogliano* CE,DF,BG, *quelle rette saranno divise in parti proporzionali* (fig. 35).

Dim. Se le due rette date *CB,EG* sono parallele, la proposizione enunciata è evidente, poichè in tal caso le parti *CD,DB* saranno respettivamente uguali alle parti *EF,FG*. Se poi non sono parallele, si prolunghino finchè s'incontrino nel punto *A*. Nel triangolo *ADF* essendo *CE* parallela a *DF*, sarà la ragione di *AD* ad *AF* uguale a quella di *CD* ad *EF* (n.° 141). Parimente nel triangolo *ABG* essendo *DF* parallela a *BG*, sarà la ragione di *AD* ad *AF* uguale a quella di *DB* a *FG*. Ma due ragioni uguali a una terza sono uguali tra loro, dunque si avrà

$CD : EF :: DB : FG$, e permutando

$CD : DB :: EF : FG$. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XXXIX — *TEOREMA.*

144. *La retta* BD *che divide in due parti uguali l'angolo* CBA *d'un triangolo, dividerà il lato opposto* AC *in due segmenti proporzionali ai lati adiacenti* (fig. 36).

Dim. Pel punto *C* si conduca la retta *CE* parallela a *BD*, e si prolunghi il lato *AB* finchè incontri la parallela medesima. Considerando le due parallele rispetto alla secante *AE*, sarà l'angolo *ABD* uguale all'angolo *BEC* (n.° 48); rispetto poi alla secante *BC* sarà l'angolo *CBD* uguale all'angolo *BCE* (n.° 48). Ma per ipotesi l'angolo *ABD* è uguale all'angolo *CBD*, dunque ancora l'angolo *BEC* sarà uguale all'angolo *BCE*; e però sarà il lato $BE = BC$ (n.° 70). Ora nel triangolo *ACE* si ha la proporzione $AD : DC :: AB : BE$; dunque, mettendo *BC* in luogo di *BE*, si avrà $AD : DC :: AB : BC$. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XL — *PROBLEMA.*

145. *Trovare la quarta proporzionale a tre rette date* (fig. 37)

Soluzione. Si tirino due rette indefinite, che facciano un angolo qualunque *CAE*. Si prenda *AB* uguale alla prima retta data; *BE* alla seconda, *AD* alla terza; indi si congiunga *BD*, e dal punto *E* si conduca *EC* parallela a *BD*; sarà *DC* la quarta proporzionale richiesta. Infatti, si avrà

$AB : BE :: AD : DC$.

146. *Corollario* I. La terza proporzionale a due rette date si trova colla stessa costruzione, cioè prendendo *AB* uguale alla

prima retta, BE alla seconda, ed AD uguale alla stessa seconda, sarà allora DC la terza proporzionale cercata.

147. *Corollario* II. Parimente se si dovesse dividere AB (fig. 38) in un dato numero di parti uguali, per esempio, in tre parti, basterebbe prendere sulla retta indefinita AH le tre parti uguali AE,EF,FG ad arbitrio, congiungere BG, e condurre a questa le parallele DF,CE. È evidente (n.° 143) che la retta AB sarà divisa nelle tre parti uguali AC,CD,DB.

Colla stessa costruzione si potrebbe dividere una retta data in parti proporzionali a più linee date. Così volendosi dividere AB in parti proporzionali a tre linee date, si prenderanno sulla retta indefinita AH tre parti AE,EF,FG respettivamente uguali alle tre linee date, e si condurranno le rette BG,DF,CE come sopra.

De' triangoli simili.

PROPOSIZIONE XIII — *TEOREMA.*

148. *Se nel triangolo* ABC *si conduca la retta* DE *parallela al lato* AC, *il triangolo* EBD *sarà equiangolo al triangolo* ABC, *e saranno proporzionali i lati adiacenti agli angoli uguali* (fig. 39).

Dim. Dal punto E si tiri EF parallela a BC. In virtù delle parallele ED,AC, l'angolo BED è uguale all'angolo BAC (n.° 48); è poi l'angolo B comune, dunque il triangolo EBD è equiangolo al triangolo ABC. Inoltre, essendo EF parallela a BC si ha $AC:FC::AB:BE::BC:BD$; ma $FC=ED$, perchè la figura $FCDE$ è un parallelogrammo, dunque mettendo ED in luogo di FC, sarà

$$AC:ED::AB:BE::BC:BD. \quad C.D.D.$$

149. *Scolio* I. Ne' triangoli equiangoli i lati adiacenti agli angoli uguali sono stati chiamati *lati omologhi*, e quelli stessi angoli si sono detti *angoli omologhi* (*). Così, il lato AB è omologo a BE,BC a BD,AC ad ED.

150. *Scolio* II. Immaginiamo che il lato AC si muova parallelamente a se stesso verso il punto B, il triangolo ABC andrà impicciolendosi sempre più, ma conserverà evidentemente sempre la stessa forma, e non varierà che nella sola grandezza. Ora, nel linguaggio comune si dice che due oggetti sono *simili*, quando la forma è in ambedue la stessa, ed essi non sono differenti che nella grandezza; da ciò è derivato che volendosi serbare una certa analogia colla comune maniera di parlare « *si sono chiamati simili due triangoli, allorchè hanno gli angoli uguali* » *ciascuno a ciascuno, ed i lati omologhi proporzionali* ».

(*) *Omologo* è parola Greca, che significa *simile ragione*.

Da questa definizione si deduce che due triangoli uguali sono sempre simili, ma non *viceversa*, vale a dire che due triangoli simili possono essere assai disuguali.

PROPOSIZIONE XLII — *TEOREMA*.

151. *Nei triangoli equiangoli i lati omologhi sono proporzionali* (fig. 40).

Dim. Ne' triangoli ABC,FGH sia l'angolo $B=G$, $A=F$, $C=H$; dico che $AB:FG::AC:FH::BC:GH$.

Sul lato BA supposto maggiore di GF si prenda $BE=GF$, e si tiri ED parallela ad AC. Da questa costruzione risulta che l'angolo BED è uguale all'angolo BAC: ma per ipotesi l'angolo BAC è uguale all'angolo GFH, dunque sarà l'angolo BED uguale all'angolo GFH, ed il triangolo EBD uguale al triangolo FGH (n.° 54). Ora ne' triangoli EBD,ABC i lati omologhi sono proporzionali (n.° 149), dunque lo saranno ancora ne' triangoli ABC,FGH. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XLIII — *TEOREMA*.

152. *Se due triangoli hanno i lati proporzionali, saranno equiangoli* (fig. 40).

Dim. Ne' triangoli ABC,FGH sia $AB:FG::AC:FH::BC:GH$; dico che sarà l'angolo $B=G$, $A=F$, $C=H$.

Si prenda $BE=FG$, e si conduca ED parallela ad AC. Si avrà la proporzione $AB:BE::BC:BD$; ma per ipotesi si ha pure $AB:FG::BC:GH$, e per costruzione $BE=FG$, dunque sarà $BD=GH$ (n.° 103). Nello stesso modo si dimostrerà che $DE=FH$, onde sarà il triangolo EBD uguale al triangolo FGH. Ma il triangolo EBD è equiangolo al triangolo ABC (n.° 148), dunque lo sarà ancora il triangolo FGH. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XLIV — *TEOREMA*.

153. *Due triangoli sono equiangoli, quando hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali* (fig. 40).

Dim. Sia l'angolo $B=G$, e sia $BA:FG::BC:GH$; dico che il triangolo ABC è equiangolo al triangolo FGH, ovvero che l'angolo $A=F$, e l'angolo $C=H$.

Si prenda $BE=FG$, e si tiri ED parallela ad AC. Si avrà la proporzione $AB:BE::BC:BD$; ma per ipotesi è pure $AB:FG::BC:GH$, e per costruzione $BE=FG$, dunque sarà $BD=GH$ (n.° 103), ed il triangolo EBD uguale al trian-

golo FGH, onde sarà l'angolo $A=F$, e l'angolo $C=H$ (n.° 148). *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XLV — *TEOREMA*.

154. *Due triangoli sono equiangoli, allorchè hanno i lati paralleli ciascuno a ciascuno* (fig. 41).

Dim. Ne' triangoli ABC,DEF sia il lato AB parallelo a DE,AC a DF, e BC ad EF; dico che sarà l'angolo $A=D,B=E,C=F$. In fatti, si prolunghi il lato FE finchè incontri in H il lato AB; indi si prolunghino i lati BA,FD fino a che s'incontrino nel punto G.

In virtù delle parallele DE,GH l'angolo DEF è uguale all'angolo GHF, e però uguale all'angolo ABC, perchè HF è parallela a BC. Parimente l'angolo EDF è uguale all'angolo FGH, il quale è uguale all'angolo BAC in virtù delle parallele AC,GF. Dunque l'angolo EDF è uguale all'angole BAC, e per conseguenza il triangolo ABC è equiangolo al triangolo EDF. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XLVI — *TEOREMA*.

155. *Due triangoli sono equiangoli, allorchè hanno i lati respettivamente perpendicolari* (fig. 42).

Dim. Ne' triangoli ABC,EDF sia il lato DE perpendicolare ad AB, il lato FD ad AC, ed il lato EF a BC; dico che sarà l'angolo $A=D$, $B=E$, $C=F$.

Nel quadrilatero $AIDH$ la somma dei quattro angoli equivale a quattro retti (n.° 82); ma gli angoli DHA,DIA sono retti, dunque la somma de' due rimanenti HAI,HDI è uguale a due retti. Ora la somma degli angoli adiacenti HDI,FDI è pure uguale a due retti, se dunque si tolga il comune angolo HDI, resterà l'angolo FDE uguale all'angolo BAC. Nello stesso modo si dimostra che l'angolo $E=B$, e l'angolo $F=C$. *C.D.D.*

156. *Scolio* I. I triangoli ABC,EDF potrebbero trovarsi in una situazione diversa da quella supposta nella figura; ma anche in tal caso l'uguaglianza degli angoli respettivi si dimostrerebbe sia colla considerazione di quadrilateri come $AIDH$, di cui due angoli sono retti, sia col paragone di due triangoli, che oltre all'avere angoli verticali hanno ciascuno un angolo retto.

157. *Scolio* II. Dalle cinque proposizioni precedenti si può concludere che *due triangoli sono simili*: 1.° *quando hanno due angoli uguali ciascuno a ciascuno*; 2.° *quando hanno i lati proporzionali*; 3.° *quando hanno un angolo uguale compreso tra due lati proporzionali*; 4.° *quando hanno i lati paralleli*; 5.° *quando hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno*.

158. *Scolio* III. Merita ancora di essere osservato che nei *triangoli simili* i lati omologhi sono sempre opposti agli angoli uguali. Dunque avrebbero potuto definirsi i lati omologhi dicendo esser quelli che ne' triangoli equiangoli sono opposti agli angoli uguali. Ma questa definizione non avrebbe potuto applicarsi ai poligoni equiangoli tra loro di qualunque numero di lati, ne' quali i lati non si oppongono agli angoli, e nulladimeno si considerano ancora i lati omologhi, cioè i lati adiacenti agli angoli uguali delle due figure.

PROPOSIZIONE XLVII — *TEOREMA.*

159. *Nel triangolo rettangolo* BAC *se dal vertice* A *dell'angolo retto si abbassa la perpendicolare* AD *sopra l'ipotenusa, i triangoli* ADB,ADC *saranno simili tra loro, ed a tutto il triangolo* BAC (fig. 43).

Dim. Imperocchè essendo l'angolo retto BAC uguale all'angolo retto BDA, e l'angolo B comune, sarà il triangolo ABD simile al triangolo BAC (n.° 157). Nello stesso modo si dimostra che il triangolo ACD è simile al triangolo BAC; dunque i tre triangoli sono simili tra loro. *C.D.D.*

160. *Corollario* I. Paragonando ciascun triangolo parziale al totale, ne risultano le due proporzioni $BC:AB::AB:BD$, e $BC:AC::AC:CD$, vale a dire « un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa, ed il segmento adiacente. »

161. *Corollario* II. Paragonando tra loro i due triangoli parziali si avrà

$BD:DA::DA:DC$. cioè

« la perpendicolare è media proporzionale tra i due segmenti dell'ipotenusa. »

PROPOSIZIONE XLVIII — *TEOREMA.*

162. *I triangoli simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi* (fig. 40).

Dim. Sieno i due triangoli simili ABC, FGH. Si prenda $BE=GF$, si tirino la ED parallela ad AC, e le diagonali AD,EC nel quadrilatero $EDCA$.

Il triangolo DEB sta al triangolo CEB come la base BD alla base BC, poichè hanno la stessa altezza. Parimente si dimostra che il triangolo CEB sta al triangolo ABC come BE a BA, ovvero come BD a BC. Ora, di tre grandezze BED,BEC,ABC la ragione della prima BED alla terza BAC è composta dalle ragioni della prima alla seconda e della seconda alla terza, dunque è composta dalla ragione di BD a BC, e dalla stessa ragio-

ne di *BD* a *BC* (n.° 116) ; per conseguenza sarà il triangolo *DEB* al triangolo *ABC* come il quadrato di *BD* al quadrato di *BC* (n.° 116), o che vale lo stesso, come il quadrato di *BE* al quadrato di *BA*, e come il quadrato di *AC* al quadrato di *ED*. Ma il triangolo *DEB* è uguale al triangolo *FGH* (n.° 151), dunque i triangoli simili stanno tra loro come i quadrati de' lati omologhi. *C.D.D.*

Dei poligoni simili.

163. Ne' triangoli simili l'uguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità de' lati, e viceversa, per cui una di queste condizioni è sufficiente a stabilire la similitudine de' triangoli. Un tale legame cessa di esistere ne' poligoni simili d'un maggior numero di lati, dapoichè in queste figure si può alterare la proporzionalità de' lati senza cangiare gli angoli, o pure si possono alterare gli angoli, senza mutare i lati. Da ciò ne risulta che la proporzionalità de' lati non può essere una conseguenza dell' eguaglianza degli angoli, nè reciprocamente. Infatti, supponiamo che i poligoni *ABCDE*, *FGHLO* (fig. 44) abbiano gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed i lati adiacenti agli angoli uguali proporzionali, è facile vedere che se da un punto preso nel lato *AE* si tiri una retta parallela al lato *ED*, il nuovo poligono, che ne risulta, sarà pure equiangolo al poligono *FGHLO*, come lo è il poligono *ABCDE*, ma i lati adiacenti agli angoli uguali cesseranno di essere proporzionali. Per queste considerazioni si è stabilito che « Due poligoni si dicono » simili, allorchè hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, » ed i lati omologhi proporzionali ».

PROPOSIZIONE XLIX — *TEOREMA.*

164. ***Due poligoni simili possono dividersi nello stesso numero di triangoli simili respettivamente, e similmente situati*** (fig. 44).

Dim. Dai vertici degli angoli omologhi *A*,*F* si conducano le diagonali *AC*,*AD*,*FH*,*FL*. Per la simiglianza de' poligoni è l'angolo $B=G$, ed i lati *AB*,*BC* sono proporzionali ai lati *FG*,*GH*; e però il triangolo *ABC* è simile al triangolo *FGH*, ondo si ha l'angolo *BCA* uguale all'angolo *GHF*. Parimente l'angolo *BCD* è uguale all'angolo *GHL* ; se dunque si tolga dal primo l'angolo *BCA*, e dal secondo l'angolo *GHF*, resterà l'angolo *ACD* uguale all'angolo *FHL*. Inoltre essendo $BC : GH :: AC : FH$, e $BC : GH :: CD : HL$, ne risulta che il triangolo *ACD* è simile al triangolo *FHL*. Nello stesso modo si dimostrerà che il triangolo *ADE* è simile al triangolo *FLO*, e così in progresso, se vi fossero altri triangoli. *C.D.D.*

165. *Scolio.* Dietro a ciò che precede sarà facile dimostrare la proposizione inversa, cioè « Due poligoni sono simili, allor» chè sono divisi nello stesso numero di triangoli simili respetti» vamente, e similmente situati ». In fatti, essendo simili i triangoli, saranno i poligoni equiangoli tra loro, ed i lati omologhi saranno proporzionali.

PROPOSIZIONE L — *TEOREMA.*

166. *I poligoni simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi* (fig. 44).

Dim. Il triangolo ABC sta al triangolo FGH come il quadrato di AC al quadrato di FH (n.° 162). Parimente il triangolo ACD sta al triangolo FHL come lo stesso quadrato di AC al quadrato di FH, dunque sarà il triangolo ABC al triangolo FGH come il triangolo ACD al triangolo FHL. Nello stesso modo si dimostrerà che il triangolo ACD sta al triangolo FHL come il triangolo ADE al triangolo FLO. Ma quando si hanno più ragioni uguali la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti come un antecedente qualunque al suo conseguente (n.° 113), dunque il poligono $ABCDE$ sta al poligono $FGHLO$ come il triangolo ABC al triangolo FGH, ossia come il quadrato di AB al quadrato di FG. *C.D.D.*

167. *Scolio.* Essendo $AB : FG :: BC : GH :: CD : HL$, ecc., sarà la somma degli antecedenti, ossia il *perimetro* del primo poligono, alla somma de' conseguenti, cioè il *perimetro* del secondo poligono come AB a FG, onde si conclude che « i pe» rimetri de' poligoni simili stanno tra loro come i lati omologhi.

PROPOSIZIONE LI — *PROBLEMA.*

168. *Sopra una retta data descrivere un poligono simile a un poligono dato* (fig. 44).

Soluzione. Sia $ABCDE$ il poligono dato, ed OL la retta data, che si considera come lato omologo al lato ED.

Si risolva il poligono in triangoli per mezzo delle diagonali AC, AD; indi si faccia l'angolo FLO uguale all'angolo ADE, e l'angolo FOL uguale all'angolo AED, sarà il triangolo FOL simile al triangolo AED. Colla stessa costruzione si descriverà sopra FL il triangolo FLH simile al triangolo ACD, e sopra FH il triangolo FGH simile al triangolo ABC. È evidente che il poligono $FGHLO$ sarà il poligono richiesto.

CAPITOLO VI.

DEI QUADRATI E DEI RETTANGOLI FORMATI SULLE LINEE RETTE.

169. Dalla misura del rettangolo (n.° 125) ne abbiamo dedotto come conseguenze immediate alcuni teoremi importanti senza bisogno di figure, e di costruzioni geometriche; ma non può farsi lo stesso per altri teoremi, abbenchè sieno anch'essi dipendenti dalla misura accennata. Tali sono quelli relativi ai quadrati ed ai rettangoli delle linee variamente divise. Per dimostrarli senza figure e senza costruzioni geometriche si dovrebbe ricorrere all'Aritmetica, o per meglio dire all'Algebra; ma le dimostrazioni fatte in tal modo uscirebbero dai confini della pura geometria, perchè dipendono dalle regole della moltiplicazione algebrica. Laonde noi esporremo i principali teoremi intorno ai quadrati ed ai rettangoli delle linee in un modo puramente geometrico (*).

Dei quadrati e dei rettangoli delle linee variamente divise.

PROPOSIZIONE LII — *TEOREMA.*

170. *Se una retta* AC *è divisa in due parti* AB,BC, *il quadrato di* AC *è uguale al quadrato di* AB, *più il quadrato di* BC, *più il doppio del rettangolo compreso fra* AB *e* BC (fig. 45).

Dim. Si costruisca sopra AC il quadrato $ACDE$; si prenda $AF=AB$, indi si conduca FG parallela ad AC, e BH parallela ad AE.

Con questa costruzione il quadrato $ACDE$ resta diviso in quat-

(*) Havvi però un teorema semplicissimo che, conoscendosi la misura del rettangolo, può dimostrarsi senza figura e senza costruzione geometrica, quantunque dipenda dalle regole della moltiplicazione: eccolo.

« Il rettangolo contenuto da due rette è uguale alla somma de' rettan» goli contenuti da una delle rette e dalle parti dell' altra » Ciò è affatto evidente, poichè tanto è moltiplicare un numero per un altro, quanto è moltiplicare il primo di questi numeri per le parti del secondo, e sommare i prodotti ottenuti. Sono poi casi particolari di questo teorema i due seguenti.

1.° « Il quadrato di una retta divisa in due parti uguaglia la som» ma de' rettangoli di essa in ciascheduna parte.

2.° « Se una linea è divisa in due parti, il rettangolo di tutta la » linea in una delle parti è uguale al quadrato di questa parte, ed al » rettangolo compreso fra le parti medesime. »

I precedenti teoremi si trovano dimostrati nelle tre prime proposizioni del lib. 2 degli Elementi di Euclide con figure e costruzioni geometriche. Noi li abbiamo tralasciati perchè non necessarj.

tro parti. La prima $ABIF$ è il quadrato fatto sopra AB, poichè $AF=AB$. La seconda $IGDH$ è il quadrato fatto sopra BC: perocchè essendo $AC=AE$, ed $AB=AF$, sarà BC, differenza delle linee AC,AB uguale ad EF differenza delle linee AE,AF; ma in virtù delle parallele si ha $BC=IG$, e $DG=EF$, dunque la figura $IGDH$ è il quadrato di BC. Inoltro, la terza parte $BCGI$ esprime il rettangolo di AB in BC, perchè $AB=BI$; e l'ultima parte $EFIH$ è pure uguale allo stesso rettangolo di AB in BC, perchè $FI=AB$, ed $EF=BC$. Dunque il quadrato di AC si compone dei quadrati di AB, e di BC e del doppio rettangolo di AB in BC, ed è perciò eguale alla somma di tutte quelle figure. *C.D.D.*

171. *Corollario.* È manifesto che se le rette AB,BC sono uguali, il quadrato di AC sarà uguale al quadruplo del quadrato di AB, o di BC. Dunque « se una retta è divisa in due » parti uguali, il quadrato dell'intera retta sarà uguale al qua» druplo del quadrato della metà ».

172. *Scolio.* Volendosi dimostrare il teorema precedente algebricamente si farebbe $AB=a$, $BC=b$, si moltiplicherebbe $a+b$ per $a+b$, ed il prodotto a^2+b^2+2ab proverebbe che il quadrato di $a+b$, ovverò di AC, somma delle linee AB,BC, è uguale ai quadrati di queste linee, ed al doppio del rettangolo compreso fra esse; in fatti a^2 è la misura del quadrato $ABIF$, b^2 quella del quadrato $IGDH$, e $2ab$ quella del doppio del rettangolo $BCGI$, o $FIHE$.

PROPOSIZIONE LIII — *TEOREMA.*

173. *Il quadrato* ABIF *della linea retta* AB *differenza delle due linee* AC *e* BC *è uguale al quadrato di* AC, *più il quadrato di* BC, *meno il doppio rettangolo di* AC *in* BC (fig. 46).

Dim. Sopra AC si descriva il quadrato $ACDE$, si prenda $AF=AB$, e si conduca BH parallela a CD, FG parallela ad AC; finalmente si costruisca sopra EF il quadrato $EFKL$, e le rette KF,FI risulteranno per diritto, per essere tutti gli angoli in F retti.

Il rettangolo $BCDH$ è uguale al rettangolo di AC in CB, poichè $CD=AC$. Parimente il rettangolo $KIHL$ è uguale al rettangolo di AC in CB, poichè $KI=AC$, ed $IH=BC$; dunque i due rettangoli $BCDH$, $KIHL$ presi insieme sono uguali al doppio rettangolo di AC in BC. Ora se da tutta la figura $ACDLKF$, composta dei quadrati di AC, e di BC, si tolgano i due rettangoli accennati, resterà il quadrato di AB, dunque questo quadrato è uguale alla somma dei quadrati di AC, e di BC, meno il doppio rettangolo di AC in BC. *C.D.D.* (*)

(*) Dalle due proposizioni precedenti si possono dedurre alcuni teoremi come conseguenze immediate, e senza alcun bisogno nè di figure, nè di

174. *Scolio*. La dimostrazione algebrica di questo teorema si riduce a fare $AC=a$, $BC=b$, ed a moltiplicare $a-b$ per $a-b$. il prodotto a^2+b^2-2ab esprimerà il teorema enunciato.

PROPOSIZIONE LIV — *TEOREMA*.

175. ***Il rettangolo compreso dalla somma e dalla differenza di due rette è uguale alla differenza dei quadrati delle stesse rette*** (fig. 47).

Dim. Siano AB,BC le due rette date. Si costruisca sopra AB il quadrato $ABIF$, si prenda $AE=AC$, si conduca CG parallela ad AF, ed EL parallela ad AB; indi sul prolungamento di questa retta si prenda $BK=BC$; e finalmente dal punto K si tiri KL parallela a BI che incontrerà EL nel punto L. Il rettangolo $AKLE$ avrà per base AK, cioè la somma delle due rette date AB,BC, e per altezza AE, ovvero la differenza delle stesse rette, essendo $AE=AC$. Ciò premesso, dico che il rettangolo $AKLE$ è uguale al quadrato di AB, meno il quadrato di BC.

---

costruzioni geometriche. Infatti, è evidente in primo luogo che « il qua» drato fatto sulla somma di due rette, più il quadrato fatto sulla diffe» renza delle stesse rette è uguale a due volte il quadrato della prima » retta, più due volte il quadrato della seconda » poichè i doppi rettangoli aggiunti e sottratti si annullano. Questa proposizione abbraccia le proposizioni 9, e 10 del lib. 2 di Euclide, che sembrano essere due proposizioni differenti, essendo diverse le enunciazioni, e le costruzioni adoperate da quel Geometra; senza contare la lunghezza, e la pesantezza delle dimostrazioni. E si noti ancora che negli Elementi Euclidei non si vede fatto alcun uso delle proposizioni medesime.

In secondo luogo dalle stesse due nostre proposizioni deriva manifestamente che il quadrato della somma di due rette eccede la somma de' loro quadrati per quanto è il doppio rettangolo compreso dalle rette medesime; e che da un' altra parte la somma di quelli quadrati eccede il quadrato fatto sulla differenza delle due rette per lo stesso doppio rettangolo. Per conseguenza l' eccesso della prima sulla terza delle tre indicate quantità eguaglierà la somma de' due eccessi, cioè il quadruplo del rettangolo delle due rette, e quindi « il quadrato fatto sulla somma di due rette è uguale » al quadrato fatto sulla loro differenza, più il quadruplo del rettangolo » compreso dalle rette medesime. »

A questa proposizione si riduce la prop. 8 lib. 2 di Euclide, che trovasi dimostrata da quell' autore con una lunga e pesante costruzione geometrica.

Volendo dedurre le conseguenze sopraddette algebricamente, non si dovrà far altro che sommare nel primo caso a^2+b^2+2ab con a^2+b^2-2ab; il che darà $2a^2+2b^2$: e nel secondo converrà sottrarre a^2+b^2-2ab da a^2+b^2+2ab, e si avrà $4ab$.

Ciò che precede potrà servire ad esercizio de' giovani, ed a far loro comprendere che i metodi generali sono sempre da preferirsi alle vie particolari.

Imperocchè, il rettangolo *AKLE* è composto dei due rettangoli *ABHE*, e *BHLK*; ma il rettangolo *BHLK* è uguale al rettangolo *CDHB*, perchè hanno le basi uguali *BK*,*BC*, e la stessa altezza *BH* (n.° 128); ed è poi il rettangolo *CDHB* uguale al rettangolo *EDGF* (n.° 170), dunque il rettangolo *AKLE* è uguale alla somma de' due rettangoli *ABHE*, ed *EDGF*. Or questi due rettangoli formano tutto il quadrato *ABIF* meno il quadrato *DHIG*, ch'è il quadrato fatto sopra *BC* (n.° 170); dunque il rettangolo *AKLE* è uguale al quadrato di *AB* meno il quadrato di *BC*. *C.D.D.* (*).

176. *Scolio*. Questo teorema si dimostra algebricamente facendo $AB = a$, $BC = b$, e moltiplicando $a+b$ per $a-b$; il che dà $a^2 - b^2$.

Dei quadrati fatti sopra i lati dei triangoli.

PROPOSIZIONE LV — *TEOREMA*.

177. ***Il quadrato fatto su la ipotenusa* BC *d'un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra i cateti* AB,AC (fig. 48).**

Dim. Abbassando dal vertice *A* del triangolo rettangolo la perpendicolare *AD* sull'ipotenusa, ne risulteranno i tre triangoli *ABD*,*ADC*,*ABC*, che essendo simili (n.° 159) stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi *AB*,*AC*,*BC* (n.° 162), cioè come i tre quadrati *M*,*N*,*P*: ma il triangolo *ABC* è uguale alla somma dei triangoli *ABD*,*ADC*, dunque il quadrato *P* sarà ancora uguale alla somma dei quadrati *M*, ed *N*. *C.D.D.*

178. *Corollario* I. Le figure simili di qualunque numero di lati essendo fra loro come i quadrati dei lati omologhi ne risul-

(*) A questa proposizione si riducono le proposizioni 5, e 6 del lib. 2 di Euclide, che in quell' autore sembrano due teoremi totalmente diversi fra loro.

Riunendo ora ciò che precede a quello che si è detto nelle due ultime note si vede chiaramente che le proposizioni più difficili, e più intricate del suddetto libro Euclideo si possono ridurre a tre proposizioni principali facilissime ad esser dimostrate, ed ad imprimersi nella memoria, mentre tutti sanno quanto sono pesanti le enunciazioni, e le dimostrazioni del lib. 2 del Geometra Greco, e come subito si dimenticano dopo averle apprese con tanto stento. Ciò diciamo per dare una formale smentita a taluni, i quali hanno asserito ch'era una *vera demenza* preferire agli Elementi Euclidei la Geometria dell' illustre Legendre, cui è dovuta la mirabile riduzione di cui parliamo, abbenchè nell' opera del Geometra moderno non si faccia alcuna menzione delle prop. 1, 2, 3, 8, 9, e 10 del Geometra antico per le ragioni da noi allegate nelle note precedenti.

ta che: *la figura descritta sulla ipotenusa è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte sopra i cateti.*

179. *Corollario* II. I triangoli *ABD*,*ADC* avendo la stessa altezza *AD* stanno fra loro come le basi *BD*,*DC* (n.° 135); ma gli stessi triangoli sono proporzionali ai quadrati *M*, ed *N*, dunque: *I quadrati dei cateti stanno fra loro come i segmenti adiacenti dell'ipotenusa.* Nello stesso modo si dimostrerà che, *Il quadrato dell'ipotenusa sta al quadrato di un cateto come l'ipotenusa sta al segmento adiacente al cateto medesimo.*

180. *Corollario* III. Sia *ABCD* un quadrato (fig. 49), e sia *AC* la sua diagonale: il triangolo *ABC* essendo rettangolo ed isoscele, sarà il quadrato della diagonale *AC* doppio del quadrato fatto sul lato *AB*. Se dunque si faccia $AB=1$, il quadrato della diagonale *AC* sarà espresso dal numero 2, poichè il quadrato di 1 è 1. Da ciò ne consegue che la diagonale *AC* sarà espressa dalla radice di 2. Ora è dimostrato nell'Aritmetica (*) che la radice di 2 non può esser espressa esattamente nè da un numero intero, nè da un fratto, dunque non si può assegnare esattamente in numeri il rapporto che passa fra la diagonale *AC* ed il lato *AB* del quadrato; e però queste due linee sono incommensurabili fra loro (n.° 93) (**).

181. *Scolio.* La proposizione precedente è una delle più importanti della Geometria. Pittagora fu il primo a dimostrarla; e perciò viene conosciuta sotto il nome di *teorema Pittagorico.*

PROPOSIZIONE LVI — *TEOREMA.*

182. *In un triangolo ottusangolo* ABC *il quadrato del lato* AB *opposto all'angolo ottuso* ACB *è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati* AC,CB, *più il doppio del rettangolo compreso fra uno di essi* CB, *e la retta* CD *interposta tra il vertice dell'angolo ottuso, e la perpendicolare* (fig. 50).

(*) Vedi l'Aritmetica di Francoeur n.° 63.

(**) Euclide nel lib. 10 dimostra che la diagonale di un quadrato è incommensurabile col lato di esso in due modi diversi, ma però dipendenti dalle proprietà de' numeri da lui esposte ne' libri precedenti. Il dotto commentatore Clavio vi ha aggiunto una dimostrazione che in sostanza è quella stessa da noi riportata in questo corollario, e che trovasi nelle moderne istituzioni di Geometria. Ciò non ostante alcuni passionati lodatori (o piuttosto detrattori) di Euclide accusano una siffatta dimostrazione d'*impropriètà geometrica*, perchè si fa dipendere da un teorema di Aritmetica in cui si dimostra che il numero 2 non può avere radice esatta nè in numeri interi, nè in numeri frazionarj. Converrà dunque dire che il citato lib. 10 del Geometra Greco contenga improprietà geometriche, e che anche il Clavio sia stato un *pericoloso novatore* in fatto di Geometria, siccome i detrattori hanno asserito rispetto al Legendre, al Wolfio, ed a tutti i moderni autori d'istituzioni geometriche!!!

Dim. Nel triangolo rettangolo *ABD* il quadrato di *AB* è uguale al quadrato di *AD*, più il quadrato di *BD* (n.° 177); ma la retta *BD* è uguale alla somma delle due rette *CD*, *CB*, e perciò il quadrato di *BD* è uguale al quadrato di *CD*, più il quadrato di *BC*, più il doppio rettangolo di *BC* in *CD* (n.° 170); dunque il quadrato di *AB* è uguale ai quadrati di *AD*, di *CD*, di *BC*, ed al doppio rettangolo di *BC* in *CD*: ma la somma de'quadrati di *AD*, e di *CD* è uguale al quadrato di *AC* (n.° 177), dunque il quadrato di *AB* equivale ai quadrati di *AC*, e di *BC* insieme col doppio rettangolo di *BC* in *CD*. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE LVII — *TEOREMA.*

181. *In un triangolo* ABC *il quadrato del lato* AB *opposto ad un angolo acuto* ACB, *è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati* AC,CB, *meno il doppio rettangolo compreso fra uno di essi* BC, *e la retta* CD *interposta fra il vertice dell'angolo acuto*, *e la perpendicolare* AD (fig. 51).

Dim. La perpendicolare *AD* può cadere dentro, o fuori del triangolo *ABC*.

I. Nel triangolo rettangolo *ABD* il quadrato di *AB* è uguale al quadrato della perpendicolare *AD*, più il quadrato della retta *BD*, ch'è differenza delle due *BC*, *CD*; per conseguenza sarà il quadrato di *AB* uguale al quadrato di *AD*, più il quadrato di *BC*, più il quadrato di *DC*, meno il doppio rettangolo di *BC* in *CD* (n.° 173). Ma i quadrati di *AD*, e di *CD* presi insieme equivalgono al quadrato di *AC* (n.° 177), dunque il quadrato di *AB* è uguale alla somma dei quadrati di *AC*, e di *CB*, meno il doppio rettangolo di *BC* in *CD*.

II. Se la perpendicolare *AD* cadesse sul prolungamento di *CB* fuori del triangolo *ABC*, avrebbe luogo la medesima dimostrazione; solamente la linea *BD* sarebbe differenza delle linee *CD*,*CB*, mentre nel caso precedente era differenza delle linee *CB*,*CD*. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA.*

182. *In un triangolo qualunque* ABC, *se si divide un lato* BC *per metà*, *e si congiunge il punto di mezzo* E *col vertice* A *dell'angolo opposto*, *la somma dei quadrati degli altri due lati* AB,AC *è uguale a due volte il quadrato della congiungente* AE, *più due volte il quadrato della metà del lato* BC. (fig. 52).

Dim. Si abbassi sul lato *BC* la perpendicolare *AD*.

Nel triangolo ottusangolo *ABE* il quadrato di *AB* è uguale

alla somma dei quadrati di AE, e di EB, più il doppio rettangolo di BE in ED. Al contrario nel triangolo acutangolo AEC il quadrato di AC è uguale alla somma dei quadrati di AE, e di EC, meno il doppio rettangolo di EC in ED. Ma il quadrato di EC è uguale al quadrato di EB, ed il doppio rettangolo di BE in ED è lo stesso che il doppio rettangolo di EC in ED, dunque la somma dei quadrati di AB, e di AC equivale al doppio del quadrato di AE, più il doppio del quadrato di BE, poichè il doppio rettangolo aggiunto e sottratto si annulla. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE LIX — *TEOREMA.*

183. *In ogni parallelogrammo* ABCD *la somma dei quadrati dei quattro lati equivale alla somma dei quadrati delle due diagonali* (fig. 53).

Dim. Imperocchè, tirando le diagonali AC,BD, esse si taglieranno scambievolmente in parti uguali nel punto E (n.° 86); per conseguenza nel triangolo ABC la somma dei quadrati dei lati AB,BC sarà (n.° 182) uguale a due volte il quadrato di BE, più due volte il quadrato di AE. Parimente nel triangolo ADC la somma dei quadrati dei lati CD,DA è uguale a due volte il quadrato di ED, ovvero di EB, più due volte il quadrato di AE. Laonde la somma dei quadrati dei quattro lati AB,BC, CD,DA sarà uguale a quattro volte il quadrato di BE, più quattro volte il quadrato di AE. Ma il quadruplo del quadrato di BE è uguale al quadrato di BD (n.° 171), ed il quadruplo del quadrato di AE è uguale al quadrato di AC; dunque la somma dei quadrati dei lati del parallelogrammo $ABCD$ è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali. *C.D.D.* (*).

PROPOSIZIONE LX — *PROBLEMA.*

184. *Costruire un quadrato equivalente ad un parallelogrammo dato* (fig. 54).

Soluzione. Sieno B la base, ed A l'altezza del parallelo-

(*) Questa proposizione, e la precedente trovansi nella Geometria del Caravelli. Gli scritti di questo Autore, e quelli del dottissimo Niccolò de Martino mostrano che presso di noi esistevano eccellenti istituzioni di Geometria molto tempo prima che altre nazioni avessero prodotto buoni libri di questo genere. Si vede ancora che que' nostri insigni Matematici professando per Euclide tutta la venerazione che gli è dovuta, stimarono nondimeno che gli Elementi di quel grande Geometra non fossero più adattati all'insegnamento della scienza. Or che diremo nei nostri tempi?

grammo dato. Sopra una medesima retta si prenda $FD=B$, e $DE=A$, indi si divida FE per metà nel punto C, e fatto centro in C si descriva col raggio CF la circonferenza FHE; finalmente dal punto D s'innalzi la perpendicolare DH, e sarà questa il lato del quadrato richiesto. Perocchè essendo $FC=CE$, la retta FD sarà la somma delle duo rette FC,CD, e la retta DE sarà la differenza delle stesse rette; per conseguenza (n.° 175) il rettangolo di FD in DE equivarrà al quadrato di FC, ovvero di CH, meno il quadrato di CD. Ma il quadrato di CH meno il quadrato di CD è uguale al quadrato di DH (n.° 177), dunque il quadrato di DH è equivalente al rettangolo di FD in DE, ovvero al parallelogrammo dato, perchè questo ha la stessa base e la stessa altezza del rettangolo.

185. *Corollario* I. Essendo $DH \times DH$ uguale a $FD \times DE$, ne segue (n.° 105) che $FD : DH :: DH : DE$; e però *la perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti del diametro medesimo*.

Laonde con la costruzione fatta in questo problema si può trovare una media proporzionale fra due rette date.

186. *Corollario* II. Se B ed A dinotino la base, e l'altezza di un triangolo, è manifesto che si potrà costruire un quadrato equivalente al detto triangolo trovando una media proporzionale fra la base B, e la metà dell'altezza A. Il quadrato descritto sulla media proporzionale accennata sarà quello che si cerca.

187. *Corollario* III. E poichè ogni poligono si può trasformare in un triangolo equivalente (n.° 138), ne segue che si può costruire un quadrato equivalente a qualunque poligono dato.

PROPOSIZIONE LXI — *PROBLEMA*.

188. *Trovare due linee il cui rapporto sia uguale al rapporto di due quadrati dati* (fig. 43).

Soluzione. Si pongano ad angolo retto i lati AB,AC dei due quadrati dati, si congiunga BC, e si abbassi dal punto A la perpendicolare AD; i segmenti BD,DC staranno fra loro come i quadrati dati (n.° 179), e però il problema sarà risoluto.

189. *Scolio* I. Il problema precedente si potrebbe ancora risolvere in un altro modo, cioè col trovare la terza proporzionale P in ordine ai lati AB,AC dei due quadrati dati. Infatti, essendo proporzionali le rette AB,AC, P, la ragione di AB a P sarà duplicata della ragione di AB ad AC (n.° 116); e per conseguenza sarà AB a P come il quadrato di AB al quadrato di AC.

190. *Scolio* II. Potendosi un poligono qualunque trasformare in un quadrato equivalente, si comprende facilmente che me-

diante la sopraddetta costruzione potrebbe trovarsi in linee il rapporto di due poligoni qualunque (*).

CAPITOLO VII.

DELLE PROPRIETÀ DEL CERCHIO.

191. Il cerchio considerato in se stesso non presenta altra proprietà se non quella inerente alla sua definizione; proprietà la quale offre il mezzo di determinare con la legge di continuità una serie di punti equidistanti da un punto dato, e ciò è bastato per la costruzione di tutti i problemi precedentemente risoluti. Ma se il cerchio si considera nel suo incontro colla linea retta, si vedranno nascere proprietà importantissime, che vengono ad esso comunicate dalle figure rettilinee risultanti dalle sue intersezioni con linee rette variamente situate. Lo studio delle proprietà del cerchio sotto questo aspetto merita la più grande attenzione; dapoichè la linea retta è il termine di paragone delle linee curve, senza del quale non si potrebbero conoscere le affezioni di qualsisia curva.

192. Negli elementi di Geometria si espongono soltanto le proprietà più comuni del cerchio. I limiti che ci siamo prescritti ci obbligano a parlare unicamente di queste; ma prima di esporle convien premettere alcune definizioni:

1.° Una porzione qualunque della circonferenza dicesi *arco*.

2.° La *corda* o *sottesa* dell'arco è la linea retta che unisce le sue estremità.

(*) La riduzione del rapporto di due poligoni qualunque a quello di due linee è uno dei più belli risultati della Geometria. Ma questo soggetto non può riguardarsi come compiuto se non quando si ha il mezzo di esprimero il rapporto di due linee in numeri o esattamente o per approssimazione, secondo che le dette linee sono commensurabili, o incommensurabili, dapoichè la Geometria deve servire alle applicazioni, e non già ad alimentare una sterile contemplazione. Euclide nella Prop. 3 lib. 10 si è occupato a trovare la massima comune misura di due grandezze commensurabili. I moderni autori di Elementi geometrici hanno riprodotto il procedimento del geometra greco, e con esso sono giunti facilmente ad esprimere in numeri esattamente il rapporto di due linee commensurabili, e per approssimazione quello delle linee incommensurabili. Intanto nell'opuscolo, di cui si è parlato nella nota alla proposizione XXXI, si dice che il Legendre, e per conseguenza molti autori di moderne istituzioni geometriche che lo hanno imitato, nella determinazione del sopraddetto rapporto numerico *si è abbandonato a considerazioni affatto ageometriche*; e vi si aggiunge che nel caso delle rette incommensurabili s'incontra pure un'altra difficoltà, ed è che nel tralasciare l'ultimo residuo il Legendre *dee considerarlo infinitesimo* (!!!). Non ci fermeremo a combattere opinioni siffatte, avendo mostrato abbastanza nella nota indicata la stravaganza e la fallacia de' principj contenuti nell'opuscolo *innominato*, che chiameremo alla nostra volta *antilogici*, o se più piace, *alogici*.

3.° *Segmento di cerchio* è la figura compresa fra l'arco e la corda.

4.° *Settore* è la figura compresa fra un arco e i due raggi condotti all'estremità di esso.

193. Dalle definizioni precedenti si deduce evidentemente che ad una medesima corda AB (fig. 55) corrispondono due archi ADB, $AECB$, e per conseguenza due segmenti ; ma nelle seguenti proposizioni s'intende sempre parlare del più piccolo, purchè non si avverta il contrario.

PROPOSIZIONE LXII — *TEOREMA.*

194. *Una linea retta non può incontrare la circonferenza di un cerchio in più di due punti* (fig. 55).

Dim. Imperocchè se una linea retta potesse incontrare la circonferenza in tre punti A, B, C, tirando i raggi OA, OB, OC, vi sarebbero tre rette uguali condotte da uno stesso punto O sopra una medesima linea retta ABC; il che è impossibile (n.° 75). Dunque una linea retta non può incontrare la circonferenza in più di due punti. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE LXIII — *TEOREMA.*

195. *Ogni diametro divide il cerchio, e la sua circonferenza in due parti uguali* (fig. 55)

Dim. Sia AC un diametro qualunque: Si applichi la figura mistilinea AEC sopra la figura ABC, conservando la base comune AC; è manifesto che la linea curva AEC dovrà coincidere colla linea curva ABC, altrimenti o nell'una o nell'altra vi sarebbero punti non ugualmente distanti dal centro O, il che non può essere. Dunque il diametro divide il cerchio, e la sua circonferenza in due parti uguali. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE LXIV — *TEOREMA.*

196. *Ogni corda è minore del diametro* (fig. 55)

Dim. Sia AB una corda qualunque ; per una delle sue estremità A si tiri il diametro AC, poi si conduca il raggio OB. Nel triangolo AOB il lato AB è minore della somma degli altri due OA, OB, ma la somma di questi due raggi è uguale al diametro AC; dunque ogni corda è minore del diametro. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE LXV — *TEOREMA.*

197. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, gli archi uguali sono sottesi da corde uguali ; reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali.* (fig. 56).

Dim. Sia l'arco AMD uguale all'arco ENG; dico che la corda AD sarà uguale alla corda EG.

Perocchè essendo uguali i due cerchi, soprapponendo il diametro AB al diametro EF, la semicirconferenza $AMDB$ coinciderà colla semicirconferenza $ENGF$, e l'arco AMD con l'arco ENG, ed il punto D col punto G; onde la corda AD sarà uguale alla corda EG.

Reciprocamente se la corda AD è uguale ad EG, sarà l'arco AMD uguale all'arco ENG. Imperocchè tirando i raggi CD, OG, i due triangoli ACD, EOG avranno i tre lati respettivamente uguali, e per conseguenza saranno uguali. Laonde applicando il semicerchio ADB sul semicerchio EGF, l'angolo ACD caderà sul suo uguale EOG; e però l'arco AMD coinciderà evidentemente con l'arco ENG. $C.D.D.$

198. *Corollario.* La dimostrazione precedente fa conoscere chiaramente che, *quando due archi d'un medesimo cerchio, o di cerchi uguali, sono uguali*;

1.° *gli angoli ai centri* ACD, EOG *sono uguali, e reciprocamente;*

2.° *i settori* $AMDC$, $ENGO$, *ed i segmenti* $AMDm$, $ENGn$ *sono anche uguali.*

PROPOSIZIONE LXVI — *TEOREMA.*

199. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, il maggiore di due archi è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente, purchè i detti archi sieno minori di una semicirconferenza* (fig. 56).

Dim. Sia l'arco AH maggiore dell'arco AD; dico che la corda AH è maggiore della corda AD. Infatti tirando i raggi CD, CH, si avranno i due triangoli ACH, ACD, ne' quali i due lati AC, CH sono uguali a' due lati AC, CD; ma l'angolo ACH è maggiore dell'angolo ACD; perciò sarà il terzo lato AH maggiore del terzo lato AD (n.° 55).

Reciprocamente, se la corda AH è maggiore della corda AD, si conchiuderà per mezzo degli stessi triangoli ACH, ACD che l'angolo ACH è maggiore dell'angolo ACD (n.° 56); e per conseguenza sarà l'arco AH maggiore dell'arco AD.

200. *Scolio.* Si è supposto che gli archi dati fossero minori della semicirconferenza; poichè è manifesto che se fossero maggiori, avrebbe luogo la proprietà contraria.

PROPOSIZIONE LXVII — *TEOREMA.*

201. *Il raggio perpendicolare ad una corda divide tanto questa corda, quanto l'arco sotteso in due parti uguali* (fig. 57).

Dim. Sia il raggio *CG* perpendicolare alla corda *AB*, e si conducano i raggi *CA*, *CB*, come pure le corde *AG*, *BG*.

Essendo retti gli angoli formati intorno al punto *D*, i triangoli *ADC*, *DCB*, *ADG*, *BDG* saranno rettangoli. Ora ne' due primi il cateto *CD* è comune, e la ipotenusa $CA = CB$, dunque l'altro cateto *AD* sarà uguale a *DB* (n.° 177); e però la corda *AB* è divisa in due parti uguali nel punto *D*. Parimente negli altri due triangoli essendo il cateto $AD = DB$, ed il cateto *DG* comune, sarà la ipotenusa $AG = GB$, ossia la corda *AG* uguale alla corda *GB*; ma corde uguali sottendono archi uguali (n.° 197), dunque l'arco $AG = GB$, e per conseguenza l'arco *AGB* rimane diviso per metà nel punto *G*. *C.D.D.*

202. *Scolio.* Dalla dimostrazione precedente risulta manifesto che *il centro*, *il punto di mezzo d'un arco*, *ed il punto di mezzo della sua corda si trovano sopra una medesima linea retta perpendicolare ad essa corda.* Ora, bastano due punti per determinare la posizione di una linea retta; dunque ogni linea retta che passa per due dei tre punti accennati passerà necessariamente anche pel terzo, e sarà perpendicolare alla corda.

PROPOSIZIONE LXVIII — *TEOREMA.*

203. ***Due corde uguali sono ugualmente distanti dal centro, e di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro*** (fig. 58).

Dim. 1.° Sieno le corde *AB*, *DE* uguali; si abbassino dal centro le perpendicolari *CF*, *CG*, e si conducano i raggi *CA*, *CD*.

Ne' triangoli rettangoli *CAF*, *DCG*, le ipotenuse *CA*, *CD* sono uguali come raggi di un medesimo cerchio: parimente i cateti *AF*, *DG* sono uguali come metà delle corde uguali *AB*, *DE* (n.° 201); dunque gli altri due cateti *CF*, *CG* saranno uguali (n.° 177), e però le corde uguali *AB*, *DE* sono equidistanti dal centro.

2.° Sia ora la corda *AH* maggiore della corda *DE*; dovrà essere l'arco *ANH* maggiore dell'arco *DME* (n.° 199): si prenda dunque sull'arco *ANH* la parte $ANB = DME$, si tiri la corda *AB*, e si abbassino le perpendicolari *CF*, *CI* sulle corde *AB*, *AH*.

La perpendicolare *CI* è minore dell'obliqua *CO* (n.° 75), ed a più forte ragione sarà minore della perpendicolare *CF*; ma questa è uguale a *CG*, dunque sarà *CI* minore di *CG*; e per conseguenza di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro. *C.D.D.*

Della misura degli angoli.

204. Analogamente a quanto abbiam detto nel §. 198 per un caso particolare, si chiama in generale *angolo al centro* ogni angolo che ha il vertice nel centro di un cerchio, ed è perciò formato da due raggi. Si dirà poi *angolo iscritto* quello il cui vertice è alla circonferenza ed è formato da due corde. Passiamo ad occuparci della misura di queste due specie di angoli.

PLOPOSIZIONE LXIX — *TEOREMA.*

205. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, gli angoli al centro stanno fra loro come gli archi compresi fra i loro lati* (fig. 59).

Dim. Sieno gli angoli al centro ACB, ACD; dico che stanno fra loro come gli archi AB, AD.

Imperocchè, supponendo primieramente che gli angoli sieno commensurabili, e che la loro comune misura K portata ripetutamente su gli angoli ACB, ACD sia contenuta m volte nel primo ed n volte nel secondo, è manifesto (n.° 198) che anche l' arco AB rimarrà diviso in m parti uguali, e l' arco AD in n parti uguali, onde l' angolo ACB starà all' angolo ACD come l' arco AB all' arco AD.

Che se poi gli angoli ACB, ACD fossero incommensurabili fra loro, la proposizione precedente sussisterebbe in egual modo. Infatti si faccia l' angolo ACD' uguale all' angolo ACD, e si supponga che la ragione dei due angoli ACB, ACD' in luogo di equivalere a quella degli archi AB, AD' equivalga a quella degli archi AB, AO, essendo AO maggiore di AD'. Qualunque differenza passi fra AO, ed AD', è chiaro che si potrà sempre dividere l' arco AB continuamente per metà fino ad avere parti così piccole che una almeno delle divisioni cada in qualche punto I fra D' ed O. In tal caso condotto il raggio CI, gli angoli ACB, ACI, e gli archi compresi AB, AI saranno respettivamente commensurabili, onde si potrà istituire la proporzione

$$ACB : ACI :: AB : AI.$$

Ma per ipotesi si ha

$$ACB : ACD' :: AB : AO,$$

dunque essendo in queste due proporzioni gli antecedenti uguali, si avrebbe (n.° 108) fra i conseguenti la proporzione

$$ACI : ACD' :: AI : AO,$$

la quale è insussistente, poichè l' antecedente ACI è maggiore del conseguente ACD', mentre l' altro antecedente AI è minore del conseguente AO. Nello stesso modo si ragionerebbe se l' arco

AO si supponesse minore dell'arco *AD'*; dunque dovrà essergli eguale, e però in tutti i casi gli angoli al centro di cerchi uguali stanno come gli archi compresi fra i loro lati. *C.D.D.*

206. *Scolio*. La divisione dell'arco *AB* in due parti uguali non può produrre alcuna difficoltà; poichè da una parte sappiamo dividere un angolo dato *ACB* in due parti uguali (n.° 60); e dall'altra si è dimostrato (n.° 198) che angoli al centro uguali intercettano sulla circonferenza archi uguali.

PROPOSIZIONE LXX — TEOREMA.

207. *L'angolo al centro ha per misura l'arco compreso tra i suoi lati* (fig. 59).

Dim. Dalle nozioni generali date nel (n.° 117) intorno alla misura delle quantità si desume che per misurare un angolo qualunque basta trovare il suo rapporto ad un angolo conosciuto preso per unità di misura; o siccome l'angolo retto è invariabile, così esso è stato prescelto per unità di misura degli angoli, onde volendosi misurare l'angolo al centro *ACD*, la quistione si riduce a trovare il suo rapporto coll'angolo retto. Ma da un'altra parte l'arco di cerchio compreso fra i lati d'un angolo retto, che ha il vertice al centro d'un cerchio, essendo la quarta parte della circonferenza, o un *quadrante*, si avrà pel teorema precedente,

Angolo ACD : *Angolo Retto* :: *Arco* AD : 1 *Quadrante* ;

dalla quale proporzione si deduce che il numero, da cui viene espresso il rapporto dell'arco *AD* al quadrante, esprime ancora il rapporto dell'angolo *ACD* all'angolo retto; e perciò si dice che l'angolo al centro ha per misura l'arco compreso fra i suoi lati. *C.D.D.*

208. *Scolio*. Da ciò che precede apparisce chiaramente che quantunque la misura degli angoli per mezzo degli archi di cerchio sia in certo modo indiretta, pure è facile ottenere col loro mezzo la misura diretta ed assoluta. Infatti se si paragona l'arco che serve di misura ad un angolo dato col quadrante, si avrà il rapporto dell'angolo accennato all'angolo retto; vale a dire si avrà la misura assoluta dell'angolo. È stata preferita la misura indiretta alla misura assoluta, perchè la prima riesce più comoda nella pratica.

PROPOSIZIONE LXXI — TEOREMA.

209. *L'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati* (fig. 60, 61, e 62).

Dim. Sia l'angolo iscritto BAD; dico che avrà per misura la metà dell'arco BD compreso fra i suoi lati.

Supponiamo in primo luogo che il centro O del cerchio sia situato sopra uno de' lati AD (fig. 60), e si conduca il raggio OB. L'angolo BOD, esterno al triangolo BAO, è uguale alla somma dei due interni opposti OAB,ABO (n.° 67): ma il triangolo ABO essendo isoscele si ha l'angolo OAB uguale all'angolo ABO; dunque l'angolo BOD è doppio dell'angolo BAD. Ora l'angolo BOD come angolo al centro ha per misura l'arco BD; dunque l'angolo BAD avrà per misura la metà dell'arco BD.

Supponiamo in secondo luogo che il centro cada dentro l'angolo BAD (fig. 61): si tirino il diametro AE, ed i raggi OB,OD. Per la dimostrazione precedente sarà l'angolo BOE doppio dell'angolo BAO; e l'angolo DOE doppio dell'angolo DAO; per conseguenza l'angolo al centro BOD sarà doppio dell'angolo iscritto BAD. Laonde anche in questo caso l'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Finalmente supponiamo che il centro O cada fuori dell'angolo BAD (fig. 62): si tiri il diametro AE. L'angolo BAE ha per misura la metà dell'arco BE; parimente l'angolo DAE ha per misura la metà dell'arco DE; dunqne l'angolo BAD, che è la differenza de' due angoli accennati, avrà per misnra la metà dell'arco BD, differenza degli archi BE,DE. Quindi in tutti i casi l'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati. *C.D.D.*

210. *Corollario* I. Gli angoli AMB,ANB iscritti nel medesimo segmento $AMNB$ (fig. 63) sono uguali, perchè tutti hanno per misura la metà di un medesimo arco ACB.

II. Ogni angolo BAC (fig. 64) iscritto nel semicerchio è retto; stantechè ha per misura la metà della semicirconferenza BEC, ossia un quadrante.

III. Ogni angolo AMB (fig. 63) iscritto in un segmento maggiore del semicerchio è acuto, avendo esso per misura la metà dell'arco ACB minore della semicirconferenza.

Al contrario ogni angolo ACB iscritto in un segmento minore del semicerchio è ottuso, perchè ha per misura la metà dell'arco AMB maggiore della semicirconferenza.

IV. Gli angoli opposti AMB, ed ACB (fig. 63) di un quadrilatero, di cui i vertici trovansi allogati sulla circonferenza, sono *supplementari*, cioè sono presi insieme uguali a due retti; perocchè la somma dei due archi che misurano questi angoli è uguale alla semicirconferenza.

211. *Scolio*. L'angolo BAC (fig. 64) iscritto nel semicerchio essendo retto, il triangolo BAC è rettangolo; per conseguenza tutte le proprietà dimostrate (n.° 177) rispetto al triangolo rettangolo verranno comunicate al cerchio con un semplice cangia-

mento di nomi; infatti il diametro *BC* rappresentando l'ipotenusa, e le corde *AB*,*AC* dinotando i cateti, apparterranno al cerchio le proprietà seguenti:

1.° *La perpendicolare* AD *è media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC *del diametro.*

2.° *La corda* AB *è media proporzionale fra il diametro* BC *ed il segmento adiacente* BD.

3.° *I quadrati delle corde* AB, AC *stanno fra loro come i segmenti adiacenti* BD, DC.

4.° *Il quadrato del diametro* BC *sta al quadrato della corda* AB, *o* AC *come il diametro al segmento adiacente* BD, *o* DC.

Delle tangenti, e delle secanti del cerchio.

212. Una linea retta che ha un solo punto di comune colla circonferenza del cerchio dicesi *tangente*; e questo punto comune chiamasi *punto di contatto.*

213. Ogni retta che taglia la circonferenza del cerchio, e che è prolungata al di fuori, dicesi *secante.*

PROPOSIZIONE LXXII — *TEOREMA.*

214. *La perpendicolare innalzata da un punto della circonferenza del cerchio sul raggio che passa per questo punto, è una tangente del cerchio; reciprocamente ogni tangente è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto* (fig. 65).

Dim. Sia *BC* perpendicolare al raggio *AO*; dico che sarà tangente del cerchio *EAD.* Imperocchè l'obliqua *OB* condotta ad arbitrio dal centro sopra *BC* è maggiore della perpendicolare *OA*, o della sua uguale *OD*; e però il punto *B* è fuori del cerchio, e la retta *BC* non avendo di comune colla circonferenza che il solo punto *A* sarà tangente del cerchio.

Reciprocamente se *BC* tocca la circonferenza nel punto *A*, qualunque retta *OB* condotta dal centro *O* sopra *BC* avrà una parte *DB* fuori del cerchio, eccettuato soltanto il raggio *OA*; per conseguenza la retta *OA* sarà la più corta di tutte le linee che dallo stesso punto *O* si possono condurre ad una medesima retta *BC*; e però sarà perpendicolare a *BC* (n.° 75). *C.D.D.*

215. *Corollario.* La retta *AB* essendo la sola perpendicolare che si possa innalzare sul raggio *AO* dal punto *A*, ne segue che per un dato punto della circonferenza non si può condurre che una sola tangente.

PROPOSIZIONE LXXIII — *TEOREMA.*

216. *L'angolo formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati* (fig. 66).

Dim. Al punto di contatto A si conduca il diametro. L'angolo BAD essendo retto (n.° 214) ha per misura la metà della semicirconferenza ACD: parimente l'angolo iscritto CAD ha per misura la metà dell'arco CD, dunque l'angolo BAC, formato dalla tangente BA e dalla corda AC, che è la differenza de' due angoli BAD, CAD, avrà per misura la metà dell'arco AC, differenza degli archi ACD, e CD.

Nello stesso modo si dimostra che l'angolo EAC, che è la somma degli angoli EAD, CAD, ha per misura la metà dell'arco $ANDC$. Dunque l'angolo formato da una tangente e da una corda è misurato dalla metà dell'arco compreso fra i suoi lati. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE LXXIV — *TEOREMA.*

217. *Gli archi intercetti in un medesimo cerchio, fra due secanti parallele, o fra una tangente ed una secante parallele, sono uguali* (fig. 67).

Dim. Sieno le secanti BC, DE, e la tangente FG, e si conduca il raggio OA. Essendo OA perpendicolare ad FG, lo sarà ancora alle secanti BC, DE (n.° 48); laonde (n.° 201) dividerà in due parti uguali gli archi BAC, e DAE. Perconseguenza se dagli archi AB, ed AC, uguali come metà dell'arco BAC, si tolgono gli archi AD, ed AE, uguali come metà dell'arco DAE, resterà l'arco BD uguale all'arco CE; il che prova la prima parte del teorema: l'uguaglianza degli archi AB ed AC prova la seconda. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE LXXV — *TEOREMA.*

218. *Le parti di due corde, che si tagliano in un cerchio, sono reciprocamente proporzionali* (fig. 68).

Dim. Le corde AB, CD si taglino nel punto O; dico che si avrà

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Imperocchè, conducendo AC e BD si hanno i triangoli ACO, BOD, ne' quali gli angoli in O sono uguali come opposti al vertice, e l'angolo A è uguale all'angolo D, perchè iscritti in un medesimo segmento (n.° 210); dunque questi triangoli sono simili (n.° 157), ed i lati omologhi danno la proporzione

$$AO : DO :: CO : OB. \quad C.D.D.$$

219. *Corollario.* Poichè in ogni proporzione il prodotto dei termini estremi è uguale a quello dei medj (n.° 104), si avrà

$$AO \times OB = DO \times OC,$$

vale a dire che *se due corde si tagliano, il rettangolo compreso fra le due parti dell'una è equivalente al rettangolo compreso fra le due parti dell'altra.*

PROPOSIZIONE LXVI — *TEOREMA.*

220. ***Due secanti che partono da un punto preso fuori del cerchio, e terminano alla parte concava della circonferenza, sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne*** (fig. 69).

Dim. Sieno le due secanti OB, OC condotte dal punto O; dico che si avrà

$$OB : OC :: OD : OA.$$

Infatti tirando AC, e BD, i triangoli OAC, OBD hanno l'angolo O comune, e gli angoli B e C uguali come iscritti nello stesso segmento $ABCD$ (n.° 210); dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

$$OB : OC :: OD : OA. \quad C.D.D.$$

221. *Corollario.* Dalla precedente proporzione si deduce che

$$OB \times OA = OC \times OD;$$

cioè i rettangoli di due secanti nelle loro parti esterne sono equivalenti.

222. *Scolio.* Le due proposizioni precedènti possono essere riunite in una sola, che si enuncia così: *se due secanti s' incontrano dentro o fuori del cerchio, le quattro parti di esse, che sono comprese fra il punto d' incontro e la circonferenza, sono reciprocamente proporzionali.*

PROPOSIZIONE LXVII — *TEOREMA.*

223. ***Se da un punto preso fuori del cerchio si conduce una tangente, ed una secante, la tangente sarà media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna*** (fig. 70).

Dim. Dal punto O si conduca la tangente OA, e la secante OC; dico che si avrà

$$OC : OA :: OA : OD.$$

Imperocchè, tirando le corde AD, AC risulteranno i triangoli OAD, OAC, ne' quali l' angolo O è comune ad ambidue, e l'angolo OAD formato da una tangente e da una corda, è uguale all' angolo C iscritto nel segmento ACD, perchè tutti due hanno per misura la metà di un medesimo arco AD; dunque i due triangoli sono simili, e si ha la proporzione

$$OC : OA :: OA : OD. \quad C.D.D.$$

224. *Corollario.* Poichè in una proporzione continua (n.° 115). il prodotto de' termini estremi è uguale al quadrato del termine medio, si avrà

$$OC \times OD = OA^2,$$

vale a dire che *il quadrato della tangente è equivalente al ret-*

tangolo della secante nella sua parte esterna. E si osservi che questa proposizione è un caso particolare della precedente, nel quale una delle secanti, divenendo tangente, si confonde con la sua parte esterna, ed il rettangolo si cambia in quadrato.

Delle intersezioni e de' contatti de' cerchi.

PROPOSIZIONE LXXVIII — *TEOREMA.*

225. *Per tre punti dati non disposti in linea retta può sempre passare una circonferenza* (fig. 71).

Dim. Sieno i tre punti dati A,B,C. Si uniscano colle rette AB,BC, le quali si dividano per metà ne' punti D,F, e s'innalzino le perpendicolari DE,FG; queste dovranno incontrarsi in un punto O, perchè le rette AB,BC facendo angolo in B se si tira la DF, la somma degli angoli ODF, OFD risulta minore di due retti (n.° 47). Or essendo $AD=DB$, le oblique OA,OB sono uguali (n.° 75), e similmente si dimostra che $OB=OC$; dunque la circonferenza descritta col centro in O e col raggio OA passerà per i tre punti dati: *C.D.D.*

226. *Scolio.* È facile vedere che una sola circonferenza può passare per i tre punti A,B,C, cioè quella determinata dalla costruzione precedente. Perocchè, se potesse passarvi una seconda circonferenza, il suo centro dovrebbe sempre trovarsi sulle perpendicolari DE,FG, altrimenti non potrebbe essere equidistante dai tre punti dati. Ma due rette non possono tagliarsi in più d'un punto; dunque una è la circonferenza che può passare per tre punti dati.

227. *Corollario.* Di qui si deduce che *due circonferenze non si possono intersegare in più di due punti.*

PROPOSIZIONE LXXIX — *TEOREMA.*

228. *Se due cerchi s' intersegano, la retta che passa per i centri è perpendicolare a quella che unisce i due punti d' intersezione, e la divide per metà* (fig. 72).

Dim. Imperocchè, se pel punto di mezzo I della retta CD che unisce i due punti d'intersezione, ed è corda comune ai due cerchi, s' innalzi sulla corda medesima una perpendicolare, questa dovrà passare per i centri A e B (n.° 202). Ma due punti determinano la posizione di una linea retta; dunque, viceversa, la retta AB che unisce i due centri è perpendicolare alla corda CD, e la divide per mezzo. *C.D.D.*

229. *Scolio.* Se due cerchi si tagliano, dovrà dunque aver luogo un triangolo ACB fra ciascun punto d' intersezione e i due centri.

Ciò premesso, supponiamo che uno de' raggi AC sia maggiore dell'altro CB. E poichè in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due, sarà AB minore di $AC+CB$. Per la stessa ragione $AB+BC$ è maggiore di AC, e togliendo di comune BC, risulterà AB maggiore di $AC-CB$. Dunque
Se due cerchi s' intersecano, la distanza de' centri è minore della somma de' raggi, e maggiore della loro differenza.

PROPOSIZIONE LXXX — *TEOREMA*.

230. *Se la distanza de' centri di due cerchi è uguale alla somma, o alla differenza de' raggi, le loro circonferenze avranno un solo punto comune.*

Dim. I. Supponiamo che la distanza AB (fig. 73) de' centri sia uguale alla somma de' raggi AC,CB. È evidente che le due circonferenze avranno il punto C comune; dico ora che non potranno averne un altro. Infatti, sia N un punto qualunque della circonferenza NC, e si unisca questo punto con i centri A,B; ne risulterà il triangolo ANB, in cui si avrà $AN+NB$ maggiore di AB. Laonde togliendo da una parte AN, e dall'altra la sua uguale AC, resterà NB maggiore di BC, e per conseguenza il punto N si troverà fuori del cerchio CL.

II. Se la distanza de' centri AB (fig. 74) è uguale alla differenza de' raggi AC,CB, è evidente che il punto C è comune alle due circonferenze; nè vi potrà essere altro punto comune. Perocchè, sia N un punto qualunque della circonferenza CN, unendolo con i centri si avrà il triangolo ANB, in cui $AB+BN$ è maggiore di AN, ossia di AC: e togliendo di comune AB, resterà BN maggiore di BC, per cui il punto N si troverà fuori del cerchio CL. Dunque in ambedue i casi mentovati le due circonferenze hanno il solo punto C di comune. *C.D.D.*

231. *Scolio.* La posizione di due cerchi considerata in questo teorema è tale che, oltre al punto di comune che essi hanno, sono uno tutto fuori dell'altro, o uno tutto dentro dell'altro, siccome si è dimostrato. Questo fatto si enuncia allorchè si dice che *due cerchi s' incontrano e non si segano*; nè due circonferenze potrebbero incontrarsi e non segarsi avendo più d'un punto di comune. Imperocchè, se ciò potesse accadere, bisognerebbe supporre che le circonferenze, insieme ai due punti supposti comuni, avessero comune anche l'arco compreso fra quei due punti, ed allora avrebbero tre ed anche più punti di comune e si confonderebbero in una sola (n.° 226). Potrebbe, è vero, supporsi che le due circonferenze fossero disposte come nella fig. 75, in cui la linea HC de' contatti è un diametro, o come nella fig. 76, in cui la stessa linea de' contatti è una corda; ma l'impossibilità di questa supposizione risulta manifesta dalla seguente

dimostrazione che si applica ad ambedue i casi. Rappresentino A, e B i centri de' cerchi; si uniscano questi centri e si prolunghi la congiungente sino alla circonferenza esterna. Sarà AC minore di $AB+BC$, e poichè $BC=BD$, ed $AC=AE$, sarebbe AE minore di $AB+BD$; il che è assurdo.

Dunque due circonferenze *s' incontrano e non si segano* quando hanno un sol punto di comune. In questa circostanza si dice che le circonferenze si *toccano*; e da qui nasce la definizione che, *due circonferenze si toccano quando hanno un solo punto di comune, il quale si chiama punto di contatto, o contatto* (*).

PROPOSIZIONE LXXXI — *TEOREMA.*

232. *Se due cerchi si toccano, la retta che passa per i centri, passerà ancora pel punto di contatto.*

Dim. I. Imperocchè, se i cerchi si toccano esternamente (fig. 77), ed il punto di contatto C esistesse fuori della linea AB che passa per i centri A, e B, si potrebbe formare il triangolo ABC, in cui la somma dei due lati o raggi AC, CB sarebbe minore del terzo lato AB composto dei due raggi e di uno spazio intermedio; il che è assurdo.

II. Se i cerchi si toccano internamente (fig. 78), ed il punto di contatto C si trovasse fuori della linea AE che passa per i centri A, e B, si formerebbe il triangolo ABC, in cui la somma di due lati sarebbe minore del terzo. Infatti, $EB+BA=AC$;

(*) Euclide definisce il contatto de' cerchi così; *due cerchi si dicono toccarsi fra loro allorchè incontrandosi non si segano.* Ognun vede che questa non è una definizione, ma un teorema, per dimostrare il quale oltre alla proposizione precedente, presa dal Legendre con qualche dichiarazione, sono state necessarie le considerazioni aggiunte nello scolio. Ed infatti la definizione euclidea, quando si è venuto a farne l'applicazione alla teoria del contatto de' cerchi, ha fatto nascere equivoci e dubbiezze anche nella mente di geometri perspicaci; e per rimanerne convinti basterà leggere ciò che dice il Clavio nella proposizione 13 del lib. 3, e nello scolio che vi ha aggiunto; nè può rivocarsi in dubbio che quel dottissimo Gesuita è stato, ed è tuttavia uno de' migliori commentatori di Euclide. Intanto l'anonimo autore dell' opuscolo più volte citato non ha mancato di criticare *alla sua maniera* la definizione del contatto data dal Legendre, e con esso dagli altri autori moderni di elementi geometrici, lodando, come era da aspettarsi, solamente quella di Euclide. Questi pretesi lodatori e ristauratori del greco geometra, per liberarsi dal fastidio della discussione si sono appigliati ad un mezzo assai comodo, quello cioè di dichiarare gli elementi euclidei come *l' opera più perfetta uscita dalla mano dell' uomo;* onde hanno condannato, come *erroneo* e *pernicioso*, ogni altro trattato elementare, passato, presente, e futuro, che si allontani dalle forme stabilite dallo *Stichiota!*

ma *BC*, ovvero *BO*, è minore di *BE*, dunque *BC*+*BA* sarà minore di *AC*; il che è assurdo. *C.D.D.*

233. *Corollario* I. Di qui si deduce che, *se due cerchi si toccano la distanza dei centri è uguale alla somma, o alla differenza de' raggi, secondocchè i cerchi si toccano esternamente, o internamente.*

234. *Corollario* II. Se due circonferenze non hanno alcun punto comune, sono interamente separate l'una dall'altra, potendo però esser situate una fuori dell'altra, o una dentro l'altra. Quindi nel primo caso la distanza de' centri è maggiore della somma de' raggi, e nel secondo minore della loro differenza.

235. *Scolio.* Dalle cose fin qui dimostrate risulta manifesto che tutti i cerchi (fig. 74), i quali hanno i loro centri sulla linea *AB*, e passano pel punto *C*, sono tangenti uno all'altro, vale a dire hanno il solo punto *C* comune. Inoltre, se per questo punto s' innalzi sopra *AB* la perpendicolare *DF*, questa sarà tangente comune a tutti quei cerchi. Ma quantunque tra l'arco *CN* e la tangente *DF* si possa far passare una infinità di circonferenze diverse, pure non vi si può condurre alcuna linea retta; dapoichè in tal caso vi sarebbero nel punto *C* due tangenti, il che è assurdo (n.° 225). Quindi l'*angolo del contatto*, cioè l'angolo *DCN* formato dall'arco e dalla tangente, è minore di qualunque angolo rettilineo dato, per quanto piccolo si voglia supporre (*).

PROPOSIZIONE LXXXII — *TEOREMA.*

236. *Se la distanza de' centri di due cerchi è minore della somma de' raggi, e maggiore della loro differenza, i cerchi si taglieranno.*

(*) Alcuni matematici non potevano persuadersi come la circonferenza non dovesse fare con la sua tangente un angolo valutabile, mentre fra l'una e l'altra si osserva un notabile spazio indeterminato; e da qui nacque una disputa famosa sull' angolo del contatto. Ma la controversia fu definita da una convenzione sul modo di valutare gli angoli di una retta con una curva qualunque, e di due curve fra loro, poichè fu stabilito che quelli angoli fossero tradotti in angoli rettilinei, sostituendo sempre alle curve le loro tangenti nel punto d' incontro; e però l'angolo di due curve qualsivogliano fu rappresentato dall' angolo fra le tangenti condotte alle curve medesime dal loro punto d' incontro, quantunque quest' angolo differisse dal vero pel valore de' due angoli di contatto, che furono considerati quantità infinitesime e non assegnabili. Secondo questa convenzione, due curve che si toccano, avendo comune la tangente, non fanno angolo valutabile; onde la circonferenza del cerchio non fa angolo assegnabile con la sua tangente, e nelle applicazioni della Geometria spesso si considera come retto l'angolo che il raggio fa con la circonferenza. Del resto l' analisi infinitesimale ha classificato con ogni esattezza i contatti, distinguendoli in ordini, per mezzo di criterii analitici che non sono soggetti ad incertezze o interpetrazioni.

Dim. Perocchè, se si toccassero, sarebbe la distanza de' centri uguale alla somma o alla differenza de'raggi; e se non avessero alcun punto comune, sarebbe la medesima distanza maggiore della somma o minore della differenza de' raggi, contro la supposizione in ambedue i casi. Quindi i cerchi devono tagliarsi. *C.D.D.*

237. *Scolio.* Riassumendo il fin qui detto si conchiude, che due circonferenze possono avere tre punti di comune, e si confondono in una sola; due punti di comune, e si segano; un sol punto di comune, e si toccano; finalmente nessun punto di comune, ed allora sono interamente separate, ed una è fuori dell'altra, o una dentro l'altra.

La situazione rispettiva di due circonferenze che non si confondono dipende dalla distanza de' loro centri; essa è minore della somma de' raggi e maggiore della loro differenza nel caso dell' intersezione; eguaglia quella somma o quella differenza nel caso del contatto esterno o interno; e quando i due cerchi non si segano nè si toccano, la distanza de' centri è maggiore della somma o minore della differenza de' raggi, secondo che i due cerchi sono fuori uno dell' altro, o uno dentro l' altro. In quest' ultima supposizione la distanza de' centri potrebbe anche esser nulla, ed allora i due cerchi avendo lo stesso centro diconsi *concentrici*.

Il progresso che si manifesta nella distanza de' centri, passando da una all' altra delle indicate posizioni di due cerchi, fa vedere che l' intersezione di due circonferenze può cambiarsi in contatto facendo crescere o facendo diminuire la distanza de'centri con trasportare uno di essi centri lungo la perpendicolare innalzata dal mezzo della corda che unisce i due punti d' intersezione. Nel movimento, questi due punti andranno man mano accostandosi fra loro finchè caderanno sulla linea de' centri confondendosi in un solo; la corda che li unisce si annullerà e l' intersezione de' cerchi si cambierà in contatto, analogamente a ciò che si è osservato per la secante che si cambia in tangente (n.° 224). Questo passaggio dall' intersezione al contatto è la pruova più concludente della necessità di un unico punto di contatto ne' cerchi; mentre in altre curve i punti d' intersezione essendo più di due, la loro riduzione al contatto non può dare un solo punto, come ne' cerchi.

Applicazione delle proprietà precedenti alla risoluzione di alcuni problemi.

238. I. *Trovare il centro d'un cerchio o d'un arco dato* (fig. 71).

Soluzione. Si prendano sulla circonferenza o sull' arco tre punti ad arbitrio A, B, C: si tirino le corde AB, BC, e per i punti di mezzo di queste s' innalzino le perpendicolari DE, FG: il punto O del loro incontro sarà il centro richiesto (n.° 225).

239. II. ***Dividere un arco dato in due parti uguali*** (fig. 57).

Soluzione. Sia AGB l'arco dato. Si conduca la corda AB, e dal punto di mezzo D s'innalzi la perpendicolare DG; questa dividerà l'arco in due parti uguali (n.° 201).

240. III. *Per un punto dato condurre una tangente ad un cerchio*.

Soluzione. Se il punto dato A (fig. 65) è sulla circonferenza, si conduca il raggio AO, e su questo s'innalzi la perpendicolare BC, che sarà la tangente cercata (n.° 214).

Se il punto A (fig. 79) è fuori del cerchio, si unisca questo punto col centro C, e sopra CA come diametro si descriva un cerchio che taglierà il dato ne' punti D, ed E; finalmente si tirino le corde AD, AE, le quali saranno ambedue tangenti al cerchio dato.

Infatti, tirando le corde DC, CE, saranno retti gli angoli CDA, CEA, perchè ciascuno di essi è iscritto nel semicerchio. Laonde ciascuna delle rette AD, AE sarà perpendicolare all'estremità del raggio, e però tangente al cerchio (n.° 214).

241. *Scolio*. Le due tangenti AD, AE sono uguali, perchè l'ipotenusa CA è comune a' due triangoli CDA, CEA, ed il cateto $CD = CE$.

242. IV. *Sopra una retta data descrivere un segmento di cerchio capace di un angolo dato, vale a dire un segmento tale che gli angoli in esso iscritti sieno uguali all'angolo dato* (fig. 63).

Soluzione. Sia AB la retta data. Si costituisca l'angolo ABF uguale all'angolo dato; s'innalzi BO perpendicolare a BF, e GO perpendicolare ad AB nel punto di mezzo G; il punto d'incontro O sarà il centro, ed OB il raggio del cerchio richiesto.

Infatti, essendo BF tangente, l'angolo ABF avrà per misura la metà dell'arco ACB (n.° 216); ma l'angolo AMB iscritto nel segmento $AMNB$ ha pure per misura la metà di quell'arco, dunque i due angoli sono uguali, e il problema è risoluto.

243. V. ***Dividere una retta data in media ed estrema ragione, vale a dire in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale tra la minore e la retta intera*** (fig. 80).

Soluzione. Sia AB la retta data. S'innalzi dal punto B la perpendicolare BC uguale alla metà di AB; col centro C, e col raggio CB si descriva un cerchio, e si unisca la retta AC, che si prolunghi in E. Finalmente si conduca la corda EB, ed a questa la parallela DF, la quale dividerà la retta data nel modo cercato.

Infatti nel triangolo ABE essendosi tirata DF parallela ad EB, si avrà (n.° 141)

$$\left.\begin{array}{l} AB : FB :: AE : DE \\ FB : AF :: DE : AD \end{array}\right\} (a)$$

Inoltre essendo AB tangente, ed AE secante si ha (n.° 223)

$AE : AB :: AB : AD$; ma AB è uguale al diametro DE, perchè per costruzione AB è doppia del raggio BC, dunque

$$AE : DE :: DE : AD.$$

Ora, se si paragoni questa proporzione con le due (*a*), si vedrà che esse hanno una ragione comune; e però sarà

$AB : FB :: FB : FA$; che è quanto si cercava.

244. VI. *Costruire un triangolo essendo dati tre de' suoi elementi, tra i quali vi sia almeno un lato.*

Soluzione. Questo problema generale ne abbraccia quattro particolari, diversi per la differente combinazione de' dati.

I. *Sieno dati i tre lati* (fig. 72). Si tiri una retta AB uguale ad uno di questi lati; indi col centro in A, e con un raggio uguale ad un altro lato si descriva un cerchio: parimente col centro in B, e con un raggio uguale al rimanente lato si descriva un secondo cerchio che taglierà il primo ne' punti C, e D. Finalmente si conducano i raggi AC, BC, e si avrà il triangolo richiesto ABC.

245. *Scolio.* Dalle proprietà del triangolo è manifesto che ciascuno de' tre lati dati dev' esser minore della somma degli altri due; e però con tre rette prese ad arbitrio non sempre si può descrivere un triangolo.

246. II. *Sieno dati due angoli ed un lato* (fig. 81). Se i due angoli sono adiacenti al lato dato, si condurrà una retta DE uguale a questo lato; indi si farà al punto D l'angolo FDE uguale ad uno degli angoli dati, ed al punto E l'angolo FED uguale all'angolo rimanente; le rette DF, EF incontrandosi daranno il triangolo cercato.

Se il lato dato dovesse essere opposto ad uno de' due angoli dati, si tirerà AB uguale a quel lato; si farà l'angolo CAB uguale all'angolo adiacente ad AB, e finalmente in un punto qualunque M della retta AC si costruirà l'angolo AML uguale all'altro angolo dato: la parallela BC ad ML darà il triangolo richiesto ACB. Infatti, in virtù delle parallele l'angolo $ACB = AML$.

247. *Scolio.* È chiaro che gli angoli dati presi insieme debbono essere minori di due retti.

248. III. *Sieno dati due lati e l' angolo da essi compreso* (fig. 82).

Si conduca una retta indefinita DF, ed al punto D si faccia l'angolo EDF uguale all'angolo dato; indi sopra DE, DF si prendano le parti DG, DH rispettivamente uguali ai lati dati, e si tiri GH; il triangolo DGH sarà quello che si cercava.

249. IV. *Sieno dati due lati ed un angolo opposto ad uno di essi* (fig. 83).

Sono da considerarsi due casi.

1.° Se l'angolo dato C è retto o ottuso, ed è opposto al lato B, che si suppone maggiore di A. In tal caso si faccia l'angolo $MDN = C$, e si prenda $DE = A$, indi col centro in E, e con un raggio $= B$ si descriva un cerchio, che taglierà la

retta GN in due punti situati a parti contrarie del punto D; perocchè abbassando dal punto E sopra GN la perpendicolare, questa cadrà nell'angolo acuto EDG, e vi saranno due oblique uguali EF, EG situate come nella figura, essendosi supposta ED minore di EF, ovvero B. Da questa costruzione si hanno dunque due triangoli EDF, EDG, ma solo il primo risolve il problema nel senso preciso dell'enunciato.

È poi evidente che nel caso dell'angolo retto, si potrà prendere uno qualunque de' due triangoli EDF, EDG; e che se il lato opposto B fosse minore o uguale ad A, il problema sarebbe impossibile nel caso dell'angolo retto, o ottuso.

2.° Se l'angolo C è acuto, ed il lato opposto B seguiti ad esser maggiore di A, la costruzione precedente ha sempre luogo; e qui pure si vede che si hanno due triangoli, de' quali un solo soddisfà a tutte le condizioni del problema.

Ma se C è acuto, e B minore di A, in tal caso si faccia (fig. 84) l'angolo $RKQ=C$, si prenda $KI=A$; indi col centro in I, e con un raggio $=B$ si descriva un cerchio, il quale taglierà la retta KQ in due punti L, P situati da una medesima parto del punto K. Infatti, abbassando la perpendicolare IM, è manifesto che vi devono essere due oblique uguali IL, IP situate come nella figura; essendosi supposto IK maggiore di IL. Laonde si avranno due triangoli ILK, IPK, i quali soddisferanno ambedue al problema proposto.

250. *Scolio.* Qualunque sia l'angolo C (fig. 83), il problema non potrà risolversi, allorchè il lato B opposto all'angolo C *fosse minore* della perpendicolare abbassata dall'estremità E del lato adiacente sulla retta indefinita GN (*).

(*) Nella prop. 22 lib. I degli elementi di Euclide trovasi risoluto solo il primo de' precedenti quattro problemi relativi alla costruzione del triangolo, e la soluzione che se ne dà ha meritata la giusta censura di Tommaso Simpson, e di altri geometri, perchè non si era prima dimostrato che i due cerchi devono intersecarsi. Roberto Simson, che crede alla *infallibilità* di Euclide, confessa una tale mancanza, e non avendo potuto rovesciarla, secondo il suo solito, sul povero Teone, sostiene che ogni principiante può supplire a quella con un ragionamento ch'egli fa, senza avvedersi che siffatto *ristauro* non è sufficiente; perocchè (fig. 72) se i centri de' due cerchi fossero situati da una medesima parte della linea CD che unisce i punti d'intersezione, vi bisognerebbe un ragionamento diverso per provare che i due cerchi devono tagliarsi. Adunque, quasi all'entrata della geometria, un principiante dovrebbe fare due ristauri, uno dei quali è sfuggito alla sagacità dello stesso Simson, che può riguardarsi come l'Archimandrita de' *ristauratori*, e *vendicatori* di Euclide!

Ed il difetto di cui parliamo è tanto più grave in quanto che il geometra greco tratta delle intersezioni de' cerchi nel lib. 3°, mentre se ne aveva bisogno nel lib. 1, senza contare che ne parla in un modo assai imperfetto, limitandosi a provare che due cerchi non possono tagliarsi in più di due punti.

Primo, per quanto sappiamo, ad introdurre negli elementi di geome-

CAPITOLO VIII.

DE' POLIGONI ISCRITTI E CIRCOSCRITTI AL CERCHIO.

251. Un poligono dicesi *iscritto* nel cerchio, quando ciascuno de' suoi angoli ha il vertice sulla circonferenza: in tal caso il cerchio si dirà *circoscritto* al poligono.

252. Un poligono è *circoscritto* al cerchio, se ciascuno de' suoi lati è tangente alla circonferenza; ed allora il cerchio si dirà *iscritto* nel poligono.

253. Dicesi *regolare* un poligono, quando è equilatero ed equiangolo.

Vi sono poligoni regolari di ogni numero di lati. Il triangolo equilatero è quello di tre lati, ed il quadrato, quello di quattro.

---

tria la soluzione compiuta del problema generale che abbiamo considerato qui sopra, è stato il Legendre, che scrisse una istituzione geometrica adequata allo stato attuale delle matematiche, dovendo quel problema servire non solo a dare la risoluzione grafica del triangolo, ma a rischiarare i casi dubbj della trigonometria rettilinea. Ma in vece di lode, gli autori o l'autore dell'opuscolo anonimo intitolato « *osservazioni di alcuni novelli professori*, ecc. » ne hanno cavato un argomento per dichiarare la geometria del Legendre *perniciosa* alla istituzione della gioventù !!!

Ecco quello che si legge alla pagina 50 dell'opuscolo accennato: « Egli » (Legendre) trascura la determinazione, che doveva premettervi, che » poi reca in uno scolio, dopo eseguita la costruzione del problema; ed » ivi assegna per essa che in tutt' i casi *il lato sottendente non debba esser* » *minore* della perpendicolare abbassata dall'estremo del lato adiacente dato » sull'altro di esso; *il che è falso;* poichè se un tal lato pareggiasse la » perpendicolare, e però il lato adiacente dato, nel caso dell'angolo » retto, il triangolo non risulterebbe; e nel caso dell'angolo ottuso ca- » drebbe verso l'angolo conseguente del dato, ed il triangolo non sarebbe » quello che si cerca.

L'Ipercritico ha parlato; ascoltiamo ora il Legendre:

« Le problème serait impossible dans tous les cas, si le côté *était plus* » *petit* que la perpendiculaire abaissée de E sur la ligne DF (Lib. II » probl. XI).

Ora tra il *fosse minore* dell'autore francese, ed il *non debba esser minore* dell'ipercritico vi passa una grandissima differenza. Dicendo il Legendre *fosse minore* in modo assoluto, enuncia una proposizione che non potrebbe esser negata che dai soli ignoranti di geometria. Al contrario il *non debba esser minore* fa supporre che potrebbe essere maggiore o uguale; il che travolge totalmente il pensiero del Legendre, pensiero che risultava anche manifesto da ciò che l'autore francese aveva detto precedentemente, cioè che nel caso dell'angolo retto o ottuso il lato sottendente doveva esser maggiore del lato adiacente.

L'ipercritico ha dunque travisate le parole di un classico scrittore per fargli dire ciò che non ha mai detto; ed in questo modo intende egli provare che l'opera del Legendre è perniciosa alla istituzione della gioventù? Proverà egli in vece, la sua *dottrina* in fatto di gramatica, e la

PROPOSIZIONE LXXXIII — *TEOREMA*.

254. ***In ogni triangolo può iscriversi e ad ogni triangolo può circoscriversi un cerchio*** (fig. 85).

Dim. Sia ABC un triangolo qualunque: si divida per mezzo l'angolo A con la retta AO (n.° 60), e l'angolo B colla retta BO, e dal punto d'incontro O delle due rette si abbassi la perpendicolare OF sul lato AC; indi col centro in O, e col raggio OF si descriva un cerchio; dico che questo sarà iscritto nel triangolo.

Infatti, si conduca OD perpendicolare ad AB, ed OE a BC. Ne' triangoli AOF, ADO gli angoli in F, e D sono retti, l'angolo $DAO = OAF$ per costruzione, dunque sarà il terzo angolo uguale al terzo; ed essendo il lato AO comune, saranno uguali i due triangoli, onde si avrà $OF = OD$. Nello stesso modo si dimostra che $OD = OE$; e quindi il cerchio è iscritto nel triangolo.

La seconda parte della proposizione è evidente, dapoichè per tre punti A, B, C non in linea retta, può sempre passare una circonferenza. $C. D. D.$

255. *Scolio.* È facile vedere che le tre rette OA, OB, OC che dividono per mezzo i tre angoli di un triangolo concorrono in un medesimo punto.

PROPOSIZIONE LXXXIV — *TEOREMA*.

256. ***Due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati sono simili*** (fig. 86).

Dim. Sieno ABD, abd due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati; dico che sono simili. Infatti, siccome il valore di un angolo di questi poligoni dipende dal numero de' lati

---

finezza della sua logica che gli fa sospettare ed annunziare con tanta franchezza l'errore di un grande uomo in cosa di sì poco momento.

Ma lasciando andare l'ipercritico che si nasconde sotto la maschera dell'anonimo, osserviamo che volendo stare alla generalità della geometria, e non volendo considerare il caso particolare del triangolo, l'ultimo problema dovrebbe essere enunciato nel modo seguente:

« Essendo dato un angolo qualunque MDN, e presa sopra DM una » parte DE uguale ad una retta data, trovare sulla retta indefinita » GN un punto F tale che la congiungente EF risulti di data grandezza (fig. 83).

E qui si noti che il *fosse minore* del Legendre detto in modo assoluto si avvera, e quando il problema è proposto nell'accennata forma generale, e quando si limita al caso particolare del triangolo. Il che serve a mostrare con quanta circospezione e rispetto si deve procedere allorchè si esaminano i detti de' sommi scrittori. Ma non perciò l'ipercritico farà senno.

(n.° 81), che è lo stesso in ambedue, gli angoli di detti poligoni saranno uguali: da un'altra parte i lati sono proporzionali, perchè uguali in ciascun poligono; dunque i poligoni proposti sono simili (n.° 163). *C.D.D.*

257. *Corollario.* Di qui si deduce che *i perimetri de' poligoni regolari d' un medesimo numero di lati stanno come i lati omologhi, e le loro aje come i quadrati degli stessi lati* (n.° 166).

PROPOSIZIONE LXXXV — *TEOREMA.*

258. *Ad ogni poligono regolare può essere iscritto e circoscritto un cerchio* (fig. 87).

Dim. Sia ABE un poligono regolare: se per i punti I, e K di mezzo de' lati AB,BC si conducano su questi lati le perpendicolari IO,KO, il punto d'incontro O sarà il centro del cerchio che passa per i tre punti A,B,C (n.° 225); dico ora che questo cerchio passerà ancora pel punto D, vale a dire che $OD=OC$. Infatti i triangoli isosceli AOB,OBC sono uguali perchè hanno i tre lati respettivamente uguali; dunque l'angolo $OBA=OBC$, e la retta BO divide l'angolo B in due parti uguali: ma l'angolo $OBC=OCB$, ed è poi l'angolo $B=C$, dunque OC divide l'angolo C per mezzo, e quindi risulteranno uguali i triangoli OCB,OCD avendo un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali. Laonde si avrà $OD=OC$. Nello stesso modo si dimostrerà che $OD=OE=OF$.

Rimane a dimostrarsi che il cerchio descritto col centro in O e col raggio OI è iscritto nel poligono ABE; ma cio è manifesto essendo le corde uguali AB,BC,CD, ec... equidistanti dal centro. *C.D.D.*

259. *Scolio* I. Il punto O, centro comune del cerchio iscritto e del cerchio circoscritto si considera ancora come *centro del poligono regolare;* e per questa ragione gli angoli AOB, BOC, COD, ec... diconsi *angoli al centro del poligono.* È manifesto che tutti gli angoli al centro d'un poligono regolare sono uguali fra loro, e che il valore di ciascuno di essi si ottiene dividendo la somma di tutti gli angoli al centro, ossia quattro retti, pel numero de' lati del poligono.

260. *Scolio* II. Si noti ancora che *se si divida la circonferenza in un numero qualunque di parti uguali* AB,BC,CD, ec. (fig. 87), *e si uniscano i punti di divisione* A,B,C, ec.: *con altrettante corde, il poligono iscritto ABCDEF sarà un poligono regolare.*

Infatti, essendo uguali gli archi AB,BC,CD, ec.. saranno uguali le corde AB,BC,CD, ec.; come pure gli angoli ABC, BCD, CDE, ec., perchè iscritti in uguali segmenti.

Se dunque si sapesse dividere la circonferenza in quel numero

di parti uguali che si vuole, si potrebbe *iscrivere in un cerchio dato qualunque poligono regolare*. Ora, questo problema non ammette soluzione generale, appunto perchè con la riga ed il compasso non si può dividere la circonferenza in qualsivoglia numero di parti uguali. Ne' seguenti problemi vedremo quali sono i poligoni regolari che si possono iscrivere in un cerchio dato, e per conseguenza circoscrivere; essendo queste due cose, come si vedrà, intimamente connesse fra loro.

Problemi.

261. I. *Iscrivere un quadrato in un cerchio dato* (fig. 88).

Soluzione. Si conducano due diametri AC,BD che si taglino ad angoli retti, e si uniscano le estremità A,B,C,D colle corde AB,BC,CD,DA; la figura $ABCD$ sarà il quadrato iscritto, perchè essendo uguali gli angoli al centro, gli archi AB,BC etc. risultano uguali, e però il poligono sarà regolare (n.° 260).

262. *Scolio*. Il triangolo ABO essendo rettangolo ed isoscele, ne risulta che il quadrato di AB è doppio del quadrato di AO. Quindi si avrà $\overline{AB}^2:\overline{AO}^2::2:1$, ovvero $AB:AO::\sqrt{2}:1$, vale a dire che *il lato del quadrato iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 2 sta all' unità.*

263. II. *Iscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero in un cerchio dato* (fig. 89).

Soluzione. Supponiamo il problema risoluto, e sia AB un lato dell' esagono iscritto; se si tirino i raggi OA,OB dico che il triangolo AOB è equilatero. Imperocchè, essendo per ipotesi l' arco AB la sesta parte della circonferenza, sarà l' angolo al centro AOB la sesta parte di quattro retti, o la terza di due retti; per conseguenza gli angoli A,B del triangolo isoscele AOB equivalgono insieme a due terze parti di due retti, e però ciascuno di essi è la terza parte di due retti. Laonde il triangolo AOB è equiangolo, e quindi equilatero. Dunque il lato dell' esagono iscritto è uguale al raggio. Dal che ne segue che portando il raggio sei volte sulla circonferenza si avrà il poligono cercato.

Se ora si conducano le rette AC,CE,EA, il triangolo iscritto che ne risulta sarà equilatero, dapoichè le rette accennate sono le corde degli archi uguali ABC,CDE,EFA.

264. *Scolio*. La figura $ABCO$ essendo una losanga, sarà (n.° 183) il quadruplo quadrato di AB uguale alla somma dei quadrati di AC, e di BO; ma $AB=BO$, dunque il quadrato di AC sarà triplo del quadrato di AB. Laonde se $AB=1$, si avrà $AC=\sqrt{3}$, vale a dire che

Il lato del triangolo equilatero scritto sta al raggio come la radice quadrata di 3 sta all' unità.

265. III. *Iscrivere in un cerchio dato un decagono, un pentagono, ed un pentedecagono regolare* (fig. 90).

Soluzione. 1.° Si divida il raggio AO in media ed estrema ragione nel punto M (n.° 243); indi col centro in A e con un raggio$=MO$, ossia al segmento maggiore, si descriva un arco che tagli la circonferenza nel punto B, la corda AB sarà il lato del decagono richiesto. Infatti, si conduca il raggio OB, e la retta BM. E poichè per costruzione $AO : OM :: OM : MA$, ed è $MO=AB$, si avrà $AO : AB :: AB : MA$, e quindi il triangolo ABO sarà simile (n.° 153) al triangolo AMB; ma il primo è isoscele, dunque lo è ancora il secondo, e sarà $AB=BM=MO$, e per conseguenza il triangolo BMO risulterà pure isoscele. Laonde l'angolo AMB esterno al triangolo MOB sarà doppio dell'angolo O: ma l'angolo $AMB=MAB=ABO$; dunque il triangolo isoscele AOB è tale che ciascuno de' suoi angoli alla base è doppio dell'angolo al vertice, il quale sarà perciò la quinta parte di due retti, o la decima parte di quattro retti. Dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare iscritto.

2.° Unendo di due in due i vertici del decagono regolare iscritto, si avrà evidentemente il pentagono regolare iscritto.

3.° Finalmente se si adatti nel cerchio una corda AL uguale al lato dell'esagono, e, partendo dallo stesso punto A, la corda AB uguale come qui sopra al lato del decagono, la corda dell'arco BL sarà il lato del pentedecagono regolare.

Infatti, essendo l'arco AL la sesta parte, o $\frac{5}{30}$ della circonferenza, e l'arco AB la decima parte, o $\frac{3}{30}$ della circonferenza medesima, l'arco BL, differenza de' due archi accennati, sarà $\frac{2}{30}$, ovvero $\frac{1}{15}$ della circonferenza; e per conseguenza la corda BL sarà il lato del pentedecagono richiesto.

266. *Scolio.* Un poligono regolare essendo iscritto nel cerchio, se si dividano gli archi sottesi dai suoi lati in due parti uguali, e si conducano le corde delle metà degli archi, si avrà un poligono regolare iscritto di un numero doppio di lati.

Laonde il quadrato può servire ad iscrivere successivamente i poligoni regolari di 8, 16, 32, ec. lati; il decagono quelli di 20, 40, 80, ec. lati; il pentedecagono quelli di 30, 60, 120, ec. lati (*).

(*). Si è creduto per lungo tempo che questi poligoni fossero i soli che potessero iscriversi con i mezzi della geometria elementare, cioè con la riga ed il compasso; ma il sommo geometra Gauss di Brunswick ha sin dal 1801 dimostrato che con gli stessi mezzi si può iscrivere il poligono di 17 lati; ed altri ancora. Questo grande risultato è stato ottenuto dal celebre geometra per mezzo dell'Algebra. Tutta la vantata geometria degli antichi si è arrenata in questo argomento elementare; e saremmo rimasi dove gli antichi erano giunti, se l'analisi algebrica non veniva in soccorso della geometria.

Pare che l'autore anonimo dell'opuscolo, di cui più volte abbiamo

PROPOSIZIONE LXXXVI — *TEOREMA*.

267. *Il quadrato del lato del pentagono regolare iscritto è uguale al quadrato del raggio più il quadrato del lato del decagono regolare iscritto nel medesimo cerchio* (fig. 91).

Dim. Sia $ABCDE$ il pentagono regolare iscritto. L'angolo al centro BOA è $\frac{4}{5}$ di un retto (n.° 259) ; per conseguenza ciascuno degli angoli OAB, OBA è $\frac{3}{5}$ di un retto. Ora, se si divida l'arco BFA per metà, ciascuna delle corde BF, FA sarà un lato del decagono, e l'angolo al centro AOF sarà $\frac{2}{5}$ di un retto. Ciò premesso, si divida l'arco FGA per mezzo nel punto G, e si conducano le rette OG, FM; ne risulterà il triangolo AFM

parlato, non avesse neanche il sospetto di questi progressi della geometria; dapoichè alla pag. 51 si esprime così :

» Avrebbe pur dovuto (Legendre) non tralasciare la descrizione del » quindecagono nel cerchio, ch' Euclide reca ne' suoi elementi; *perchè* » *questa doveva servire a definire tutt' i rettilinei regolari, che si pos-* » *sono elementarmente iscrivere nel cerchio*, o quindi *tutte* quelle divi- » sioni della circonferenza in parti uguali, che possonsi eseguire per mezzo » della Geometria elementare ». Crede forse l' ipercritico che la iscrizione del poligono regolare di 17 lati non possa farsi con i mezzi della Geometria elementare, cioè con la intersezione della linea retta e del cerchio? Se in luogo di criticare la Geometria di Legendre, si fosse messo a studiarla con l' attenzione che merita; non solo vi avrebbe trovato fatta menzione della scoverta del signor Gauss, ma vi avrebbe trovata ancora una maniera d' iscrivere il quindecagono assai più semplice di quella di Euclide; e soprattutto avrebbe veduto come in poche proposizioni facili e generali ha saputo l' autore moderno racchiudere tutto il lib. 4 del geometra antico, senza i numerosi e nojosi casi particolari, di cui si compone il libro accennato.

Ma, o perchè l' anonimo avesse le traveggole, o perchè, non essendo forte *linguista*, come abbiamo osservato (n.° 250), non si accorse che la parola greca *pentedecagono* del Legendre equivaleva all' ibrida di *quindecagono* usata dalla più parte degli scrittori; sentenziò che il geometra francese aveva *tralasciata la descrizione* di quel poligono! E sì che il povero Legendre aveva questa volta promesso formalmente di parlarne nella stessa *enunciazione* del problema; mentre spesso, per seguire l' ordine naturale delle idee, racchiude in corollarii e scolii alcune importanti proprietà.

Nè questa è la sola mutilazione fatta dall' ipercritico alla Geometria di Legendre; perocchè, prendendo per modulo *infallibile* Euclide anche nello sue dimensioni materiali, e senza incaricarsi se il trattato moderno è scritto con lo stesso o con diverso ordine, con lo stesso o con diverso scopo, adatta i primi due libri di Legendre sopra i corrispondenti del geometra greco, come sul letto di Procuste, e ne taglia il soverchio; dichiarando inutili più della metà delle proposizioni in essi contenute, e quasi tutti i corollarii e gli scolii, per la sola potentissima ragione che non si trovano in Euclide, o che possono facilmente ricavarsi da Euclide! E con questa logica pretende l' ipercritico di fare la scuola ad un matematico di primo ordine?!!! Risponda per noi il lettore.

isoscele e simile al triangolo AFB. Infatti, le rette MA, MF sono uguali come oblique equidistanti dalla perpendicolare OG (n.° 202); perciò l'angolo $MFA = MAF = FAB = FBA$, ed i triangoli FMA, BFA sono simili e danno la proporzione,

$AM : AF :: AF : AB$, dalla quale si ricava

$$\overline{AF}^2 = AM \times AB \ldots (1)$$

Parimente il triangolo BOM, di cui due angoli OBM, BOM valgono ciascuno $\frac{2}{5}$ di un retto, è isoscele e simile al triangolo BOA che trovasi nelle medesime circostanze rispetto agli angoli OBA, OAB; e quindi si ha la proporzione $MB : BO :: BO : AB$, da cui si deduce

$$\overline{BO}^2 = MB \times AB \quad . \;. \;. \quad (2).$$

Aggiungendo tra loro le uguaglianze (1), e (2), si avrà che il quadrato di AF più il quadrato di BO è uguale ad AB moltiplicata per una sua parte AM, più la stessa AB moltiplicata per l'altra parte MB, vale a dire ad AB moltiplicata per se stessa, ossia al quadrato di AB. *C.D.D.* (*).

268. *Scolio.* È facile ora determinare il lato del quadrato, del triangolo equilatero, del decagono, e del pentagono, essendo dato il raggio AB (fig. 92) del cerchio, in cui quei poligoni devono essere iscritti. Infatti, se AB rappresenta il raggio del cerchio, s'innalzi ad esso la perpendicolare $BC = AB$, e si tiri AC; sarà questo il lato del quadrato. Sopra AC si alzi la perpendicolare $CD = AB$, e si conduca DA. Sarà questo il lato del triangolo equilatero iscritto, dapoichè il quadrato di AD ri-

(*) Chi volesse paragonare questa dimostrazione con quella che trovasi nel Lib. 13 di Euclide, resterebbe subito convinto della facilità, e brevità con cui qui procede la moderna geometria in confronto dell'antica, in virtù delle proprietà delle perpendicolari e delle oblique e de' principii stabiliti intorno alla misura degli angoli e delle aje, che mancano negli elementi euclidei. Ciò non ostante l'autore dell'opuscolo *innominato* vorrebbe proscrivere dalla geometria le misure e le proprietà delle perpendicolari e delle oblique, per la solita bellissima ragione che in Euclide non si trovano. Ed appoggiandosi ad un argomento così *convincente*, prende occasione di censurare stoltamente il Legendre e tutti gli altri autori *moderni* di elementi geometrici; come se il massimo degli *antichi* geometri, Archimede non ci avesse lasciata la misura del poligono e del cerchio, e quello ch'è più, non avesse assegnato in *numeri*, il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro!!! Chi sa se le acque di Lete bastarono a purgare il geometra di Siracusa della brutta macchia che aveva contratta, *abbandonandosi* in queste ricerche a *considerazioni ageometriche*, e specialmente introducendo nella nobile scienza dell'estensione le *basse* vedute numeriche, il cui cattivo odore dà tanta molestia all'olfatto delicato dell'anonimo?! Non v'ha dubbio che l'esempio di quel primo *novatore* ha fatto molto male alla Geometria, sviando la scienza dal *nobilissimo* scopo cui, nella tarda posterità, l'aveva riservata il nostro anonimo, di *non servire a nulla!*

sulta triplo del quadrato del raggio AB. Finalmente si divida il raggio AB in media ed estrema ragione nel punto E, e sia EB il segmento maggiore; questo sarà il lato del decagono, e la congiungente CE sarà il lato del pentagono.

PROPOSIZIONE LXXXVII — *TEOREMA.*

269. ***Essendo iscritto in un cerchio un poligono regolare, si può sempre circoscrivere al cerchio medesimo un poligono simile*** (fig. 93).

Dim. Sia abd il poligono iscritto; si dividano gli archi ab,bc etc. ciascuno in due parti uguali ne' punti m, n, k, l, r, e per questi punti si tirino le tangenti AB,BC,CD, ecc.; dico che il poligono ABD formato dall' incontro di queste tangenti è simile ad abd.

Infatti, essendo uguali gli archi mr, mn, nk, ecc., le loro corde sono pure uguali; per conseguenza saranno uguali i triangoli rAm, mBn, nCk, ecc., che hanno queste corde eguali per basi, e gli angoli adiacenti eguali, perchè ciascuno di essi è formato da una tangente e da una corda, ed ha per misura la metà di un arco eguale all' arco mr (n.° 216). Da questi triangoli isosceli ed eguali si ricava subito che le tangenti AB,BC,CD, etc. sono tutte eguali fra loro, come pure gli angoli A,B,C, etc.; e però il poligono circoscritto sarà regolare e simile all' iscritto (n.° 256). *C.D.D.*

270. ***Corollario.*** Se è dato il poligono circoscritto ABD, tirando le corde mr, mn, nk, ecc., il poligono iscritto che ne risulta sarà simile al circoscritto. Parimente è facile vedere che se si dividono per mezzo gli archi mr, mn, nk, ecc., e si congiungono i punti di mezzo a,b,c, ecc., il poligono abd che ne nasce è anche simile ad ABD.

PROPOSIZIONE LXXXVIII — *TEOREMA.*

271. ***L' aja d' un poligono regolare ha per misura il suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto*** (fig. 87).

Dim. Imperocchè, se dal centro O del poligono regolare ABE si conducano a tutti i vertici di esso le rette OA,OB,OC, ecc., si dividerà questo poligono in tanti triangoli isosceli uguali, quanti sono i suoi lati. Ma l' aja di uno di questi triangoli AOB ha per misura la sua base AB moltiplicata per la metà della sua altezza OI, raggio del cerchio iscritto nel poligono; dunque l' aja di quest' ultimo avrà per misura la somma delle basi de' triangoli, cioè il suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto. *C.D.D.*

272. *Scolio*. Si noti che il raggio OI del cerchio iscritto prende ancora il nome di *apotema del poligono regolare*; e che il raggio OA del cerchio circoscritto si chiama talvolta *raggio del poligono regolare*.

PROPOSIZIONE LXXXIX — *TEOREMA*.

273. *I perimetri de' poligoni regolari d'un medesimo numero di lati stanno come i raggi de' cerchi iscritti e circoscritti; e le loro aje come i quadrati di questi medesimi raggi* (fig. 86).

Dim. Sieno ABD,abd due poligoni regolari dello stesso numero di lati; e sieno AO,ao i raggi de' cerchi circoscritti, ed OH,oh quelli de' cerchi iscritti.

Essendo l'angolo $A=a$, le loro metà, cioè gli angoli OAH, oah saranno uguali; e perciò risulteranno simili i due triangoli rettangoli OAH, oah, onde si avrà

$$AH : ah :: AO : ao :: OH : oh ,$$

ed elevando a quadrato i termini di queste proporzioni sarà pure

$$\overline{AH}^2 : \overline{ah}^2 :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2 :: \overline{OH}^2 : \overline{oh}^2$$

Ma i perimetri de' poligoni simili ABD, abd stanno come i lati AB, ab, o come le loro metà AH, ah; e le aje degli stessi poligoni stanno come i quadrati di questi medesimi lati, o delle loro metà; dunque il teorema enunciato rimane dimostrato. *C.D.D.*

CAPITOLO IX.

DELLA MISURA DEL CERCHIO.

274. La trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente (n.° 138), e quella di un triangolo in un quadrato equivalente ci ha dato il mezzo di ottenere la *quadratura* di un poligono qualunque. Rimane ora a vedere se si può trasformare il cerchio in un triangolo, e quindi in un quadrato equivalente; dapoichè senza questa trasformazione sarebbe impossibile ottenerne la misura.

PROPOSIZIONE XC — *LEMMA*.

275. *In un cerchio dato si può iscrivere e circoscrivere un poligono regolare che differisca dal cerchio medesimo di una quantità minore di qualunque data.*

Dim. I. Nel cerchio dato (fig. 94) s'iscriva il quadrato $ABCD$, indi l'ottagono regolare $AEKL$, e condotta la tangente MN, si compia il rettangolo $ABNM$. Essendo il triangolo AEB metà di

questo rettangolo, perchè ha con esso la stessa base e la stessa altezza, ed essendo il rettangolo maggiore del segmento *ABE*; ne segue che il triangolo è più della metà del segmento. Quindi ciascun triangolo *AEB*, *BKC*, *CLD*, *DOA* toglie più della metà dal segmento corrispondente; e per conseguenza iscrivendo i poligoni regolari di 16, 32, 64, ecc., lati indefinitamente, si vede la possibilità di arrivare ad un poligono tale che lo spazio compreso tra il suo perimetro e la circonferenza sia minore di qualunque quantità data.

II. Sieno *AB*,*AC* (fig. 95) due lati del quadrato circoscritto; si divida l'arco *BDC* per mezzo nel punto *D*; indi si conducano la tangente *MN*, e le rette *BD*,*DA*,*DC*: sarà *MN* un lato dell'ottagono regolare circoscritto. Ora, essendo $BM=MD=DN=NC$, come metà di lati dell'ottagono suddetto, se dalle tangenti eguali *AB*,*AC*, si tolgano le parti uguali *MB*,*NC*, resterà $AM=AN$; e perciò nel triangolo isoscele *AMN*, la retta *AD*, che unisce il vertice *A* col punto di mezzo della base, è perpendicolare alla base medesima. Laonde l'ipotenusa *AM* è maggiore del cateto *MD*, ovvero di *MB*; e per conseguenza anche il triangolo *AMD* sarà maggiore del triangolo *MBD*, perchè questi due triangoli hanno la stessa altezza e stanno fra loro come le basi *AM*,*MB*. Similmente si dimostra che il triangolo *AND* è maggiore del triangolo *NCD*; onde tutto il triangolo *AMN* è più della metà dello spazio compreso fra le due tangenti *AB*,*AC*, e le due corde *BD*,*DC*, e con più ragione dello spazio contenuto fra le stesse tangenti e l'arco *BDC*. Dunque il triangolo *AMN* toglie da quest'ultimo spazio più della metà, per cui risulta evidente che, se si circoscrivono i poligoni regolari di 16, 32, 64, ecc., lati indefinitamente, si potrà arrivare a un poligono tale che differisca dal cerchio di una quantità minore di qualunque data. *C.D.D.*

PROPOSIZIONE XCI — *TEOREMA*.

276. *Il cerchio è equivalente a un triangolo rettangolo, di cui un cateto rappresenta la circonferenza, e l'altro il raggio* (fig. 93).

Dim. Se è possibile, sia il cerchio *mkl* maggiore del triangolo *E*. S'iscriva in questo cerchio un poligono regolare *abcd* che differisca dal cerchio medesimo di una quantità minore dell'eccesso del cerchio sul triangolo; un tal poligono sarà esso pure maggiore del triangolo. Ora, l'apotema *Ox* è minore del raggio *Om*, ed il perimetro *abcde* è minore della circonferenza (n.° 51); e però l'aja del poligono, che risulta dal prodotto di due fattori più piccoli di quelli del triangolo (n.° 271), è minore dell'aja del triangolo (n.° 134): ma doveva esser maggiore, dunque il cerchio non può esser maggiore del triangolo.

Supponiamo in secondo luogo che il cerchio sia minore del triangolo. In questa ipotesi, si circoscriva un poligono *ABCD* che differisca dal cerchio di una quantità minore dell'eccesso del triangolo sul cerchio; il poligono dovrebbe essere ancor esso minore del triangolo, il che è altronde impossibile; dapoichè l'apotema *Om* è uguale al raggio, ed il perimetro è maggiore della circonferenza (n.° 51), per cui l'aja del poligono *ABCD* deve essere necessariamente maggiore di quella del triangolo. Dunque il cerchio è equivalente al triangolo. *C.D.D.* (*).

277. *Corollario.* Di qui si deduce evidentemente che

1.° *Il cerchio ha per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio.*

2.° *Due cerchi stanno fra loro come i prodotti delle loro circonferenze per i respittivi raggi, ovvero in ragion composta delle circonferenze e de' raggi.*

278. *Scolio.* Se dunque si sapesse *rettificare* la circonferenza, cioè trovare una retta uguale alla circonferenza di un cerchio dato, si potrebbe trasformare il cerchio in un quadrato equivalente. Vedremo in appresso che la rettificazione della circonferenza non si può ottenere che per approssimazione; e per conseguenza il famoso problema della *quadratura del circolo* non si può risolvere rigorosamente.

PROPOSIZIONE XCII — *TEOREMA.*

279. *I cerchi stanno fra loro come i quadrati de' raggi* (fig. 86).

Dim, S'è possibile, abbia il cerchio *ABC* al cerchio *abc* maggior ragione che il quadrato del raggio *AO* al quadrato del raggio *ao*. Nel cerchio *ABC* s'iscriva un poligono regolare *ABCDE* che differisca dal cerchio medesimo di una quantità tale, che la ragione del poligono al cerchio *abc* sia anche maggiore di quella de' quadrati $\overline{AO}^2$, $\overline{ao}^2$; indi s'iscriva nel cerchio *abc* un

(*). Quest'ammirabile dimostrazione è dovuta ad Archimede, che fu il primo a dare la misura del cerchio. Essa è tuttavia la sola che possa dirsi rigorosa in tutta la forza del termine; ciò non ostante questo meraviglioso monumento dell'antica geometria è da gran tempo scomparso dagli elementi, ed in suo luogo vi si trovano comunemente le dimostrazioni fatte co' limiti, o con gl'infinitamente piccoli. Legendre ha riportata la dimostrazione di Maurolico, geometra siciliano; ed a questo proposito è da notarsi che, mentre taluni declamano contro la geometria del Legendre, non hanno avuto alcuno scrupolo di seguire le orme di questo autore in tutto ciò che riguarda la misura del cerchio, i così detti *teoremi* di Archimede, i triangoli sferici, ecc.. Ed in questo modo Archimede, il più grande fra gli antichi geometri, si trova proscritto da quelli stessi che portano a cielo e parlano continuamente dell'antica sapienza geometrica.

poligono *abcde* simile al poligono *ABCDE*. Per ciò che si è dimostrato (n.°273), la ragione de' poligoni *ABCDE*, *abcde* è eguale a quella de' quadrati $\overline{AO}^2$, $\overline{ao}^2$, e potrà sostituirsi ad essa; e poichè la ragione del poligono *ABCDE* al cerchio *abc* era maggiore di quella de' quadrati, sarà maggiore ancora di quella de' poligoni. Dunque delle due ragioni che una medesima grandezza *ABCDE* serba a due grandezze disuguali (il cerhio *abc* ed il poligono *abcde*), è maggiore quella che serba alla grandezza maggiore; il che è assurdo.

Se si volesse supporre la ragione del cerchio *ABC* al cerchio *abc* minore di quella dei quadrati $\overline{AO}^2, \overline{ao}^2$, ne risulterebbe che la inversa, del cerchio *abc* al cerchio *ABC* sarebbe maggiore della ragione di $\overline{ao}^2$ ad $\overline{AO}^2$; la quale supposizione col ragionamento precedente si è mostrata impossibile. Dunque i *cerchi stanno fra loro come i quadrati de' raggi. C.D.D.*

280. *Corollario* I. Essendo il diamentro doppio del raggio, ne risulta che *i cerchi stanno fra loro come i quadrati de' diametri.*

281. *Corollario* II. Essendo (n.° 277) due cerchi *ABC*, *abc* in ragion composta delle circonferenze C, c, e de'raggi R, r, si avrà

$$ABC : abc :: C \times R : c \times r$$

ma si è dimostrato qui sopra,

$$ABC : abc :: R^2 : r^2 \text{; dunque si avrà}$$

$$C \times R : c \times r :: R^2 : r^2 \text{, ossia } C : c :: R : r \text{;}$$

la quale proporzione corrisponde al teorema che, *le circonferenze de' cerchi stanno fra loro come i raggi; e per conseguenza anche come i diametri.*

PROPOSIZIONE XCIII — *TEOREMA.*

282. ***Il settore ha per misura il prodotto del suo arco per la metà del raggio*** (fig. 96).

Dim. Col ragionamento fatto nel (n.° 205) si può dimostrare che in un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, il settore *ACBM* sta al settore *ECDN* come l'arco *AMB* all'arco *END*. Ora, se l'arco *END* è un quadrante, il settore *ECDN* sarà la quarta parte del cerchio; per conseguenza il settore *ACBM* sta a 4 volte il settore *ECDN*, ovvero al cerchio intero, come l'arco *AMB* a 4 volte l'arco *END*, ossia alla circonferenza. Si ha dunque la proporzione *Settore* : *cerchio* :: *arc.* AMB : *circonferenza*, dalla quale, moltiplicando i termini della seconda ragione per la metà del raggio *AC*, risulta, *settore* : *cerchio* :: *arc.* $AMB \times \frac{1}{2} AC$: *circonf.* $\times \frac{1}{2} AC$; e poichè i due conseguenti sono eguali, saranno eguali anche gli antecedenti; onde il settore ha per misura il suo arco moltiplicato per la metà del raggio. *C.D.D.*

283. *Scolio.* In due cerchi differenti, si chiamano *archi simili*,

settori simili, *segmenti simili*, quelli che corrispondono ad angoli al centro uguali. Così l'angolo O (fig. 86) essendo uguale all'angolo o, l'arco AMB è simile all'arco amb, il settore $AOBM$ simile al settore $aobm$, ed il segmento ABM al segmento abm.

PROPOSIZIONE XCIV — *TEOREMA.*

284. *Gli archi simili stanno come i raggi, ed i settori simili come i quadrati di questi medesimi raggi* (fig. 86).

Dim. Sieno gli archi simili AMB, amb, ed i settori simili $AOBM$, $aobm$; sarà l'angolo O uguale all'angolo o. Ora, l'angolo O sta a quattro angoli retti come l'arco AMB sta alla circonferenza intera (n.° 205), ed allo stesso modo l'angolo o, ovvero O, sta a quattro retti come l'arco amb alla circonferenza; dunque gli archi AMB, amb stanno come le circonferenze di cui fan parte, ovvero come i raggi AO, ao. Per la medesima ragione i settori stanno come i cerchi, ossia come i quadrati de' raggi AO, ao. *C.D.D.*

Della rettificazione della circonferenza e degli archi del cerchio.

285. Se si dinotano con C e C' due circonferenze, e con R e R' i loro raggi, i diametri saranno $2R$, e $2R'$, ed in virtù del teorema (n.° 281), si avrà $C : C' :: 2R : 2R'$, o permutando $C : 2R :: C' : 2R'$, ovvero (n.° 94)

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Quindi apparisce che

Il rapporto di una circonferenza al suo diametro è costante, ossia è lo stesso per qualunque cerchio. E però se questa quantità costante fosse determinata, si avrebbe la rettificazione della circonferenza di un cerchio dato moltiplicando il suo diametro per la suddetta quantità costante.

Si rappresenta comunemente con la lettera greca π il rapporto della circonferenza al diametro. Laonde moltiplicando π per $2R$, il prodotto $2\pi R$ rappresenterà la circonferenza del cerchio, il cui raggio è R, poichè essendo $\pi = \frac{C}{2R}$, si ha $2\pi R = C$. In conseguenza di ciò, se si moltiplicherà la circonferenza $2\pi R$ per la metà del raggio, il prodotto πR^2 dinoterà il cerchio che ha R per raggio, vale a dire che

Il cerchio è equivalente al quadrato del suo raggio moltiplicato per π; e la circonferenza al doppio del raggio moltiplicato per lo stesso numero.

Se dunque si potesse assegnare il valore esatto di π, si avreb-

be la rettificazione della circonferenza, e quindi la quadratura esatta del circolo; ma ció non può ottenersi essendo stato dimostrato dal sommo geometra tedesco Lambert che il rapporto della circonferenza al diametro è incommensurabile. Adunque non si può ottenere il valore di π che per approssimazione. Archimede fu primo ad occuparsi di una così importante ricerca, ed assegnò per valore approssimativo di π la frazione $\frac{22}{7}$; vale a dire che posto il diametro uguale a 7, la circonferenza sarà approssimativamente uguale a 22. Questa approssimazione basta in quasi tutte le applicazioni della geometria alle arti. Un rapporto assai più approssimativo di quello di Archimede è dovuto ad Adriano Mezio geometra Olandese, che trovò $\pi=\frac{355}{113}$. Finalmente si è avuta la pazienza di spingere l'approssimazione fino a 140 cifre decimali, delle quali le prime dieci sono

$$\pi = 3,1415926535.$$

Una tale approssimazione basta per le applicazioni le più delicate della geometria ai problemi di Astronomia, di Meccanica, ecc.... Laonde la quadratura esatta del circolo non avrebbe alcun vantaggio reale sulla quadratura approssimativa, di cui parliamo. Passeremo ora ad esporre uno de' procedimenti più elementari, coi quali si è giunto a trovare il valore approssimativo di π.

PROPOSIZIONE XCV — *LEMMA*.

286. *Essendo dati i raggi* r *ed* R *de' cerchi iscritto e circoscritto ad un poligono regolare, trovare i raggi* r' *ed* R' *dei cerchi iscritto e circoscritto ad un poligono regolare* isoperimetro, *cioè di equivalente perimetro, ma di un doppio numero di lati* (fig. 97).

Soluzione. Sia AC il lato del poligono dato, O il suo centro, B il punto di mezzo di AC; si avrà $OB=r$, ed $OA=R$. Si prolunghi OB finchè sia $OD=OA$, e si tirino le rette DA,DC. Il triangolo AOD essendo isoscele, sarà l'angolo $OAD=ODA$; per conseguenza l'angolo esterno AOB è doppio dell'angolo interno opposto ODA: similmente si dimostra che l'angolo BOC è doppio dell'angolo ODC, per cui l'angolo AOC sarà doppio di ADC. Di qui si deduce che l'angolo ADC equivale all'angolo al centro di un poligono regolare che ha un numero di lati doppio di quello del poligono proposto.

Ciò premesso, dal punto O si abbassi sopra AD la perpendicolare OI, che dividerà AD per mezzo nel punto I, perchè il triangolo AOD è isoscele. Ora conducendo IH parallela ad AC si ha $IH:AC::ID:AD$; dunque IH è metà di AC; e quindi IH è il lato di un poligono regolare isoperimetro al poligono proposto e di un doppio numero di lati. E di più, si potrà considerare il punto D come il centro di questo poligono, in cui si avrà $DM=r'$, e $DI=R'$.

Ora per la simiglianza de' triangoli IMD, ABD si ha $DM : DB :: DI : DA$; dunque DM è metà di DB: e poichè $BD = BO + OD$, ed $OD = OA$, si avrà

$$r' = \frac{r+R}{2} \quad \ldots\ldots (1),$$

vale a dire che il raggio r' è medio proporzionale aritmetico fra i raggi r ed R.

Inoltre nel triangolo rettangolo OID essendosi abbassata dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare IM sulla ipotenusa, sarà DI media proporzionale geometrica fra DO, e DM, ovvero fra AO e DM. Quindi si avrà

$$R' = \sqrt{r' \times R} \quad \ldots. (2).$$

Ed ecco trovati i raggi de' cerchi iscritto e circoscritto al poligono isoperimetro al proposto e di un doppio numero di lati (*).

PROPOSIZIONE XCVI — *PROBLEMA.*

287. *Assegnare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro* (fig. 98).

Soluzione. Giusta il principio di Archimede (n.° 51), la circonferenza del cerchio circoscritto ad un poligono regolare è maggiore del perimetro del poligono medesimo, mentre la circonferenza del cerchio iscritto è minore di quello stesso perimetro. Quindi risulta manifesto che la circonferenza, la quale fosse uguale al suddetto perimetro, dovrebb' essere compresa fra le due circonferenze summentovate; e poichè le circonferenze stanno come i raggi, si conchiuderà che il raggio di questa terza circonferenza dev' essere compreso fra i raggi de' cerchi iscritto e circoscritto al poligono.

Ciò premesso, si prenda per punto di partenza un quadrato, di cui un lato AC sia uguale a 2; il perimetro sarà 8, e si vuol

(*). Questa bella proposizione è dovuta al signor Schawb, che la pubblicò in un piccolo trattato di geometria piana a *Nancy* nel 1813. Per mezzo di essa si può trovare non solo col calcolo, ma anche con la riga ed il compasso il raggio di un cerchio, di cui la circonferenza differisca dal perimetro di un dato poligono regolare tanto quanto si voglia. Legendre alla fine del Lib. IV della sua geometria dà pure il mezzo di trovare col calcolo, o colla riga ed il compasso un cerchio che differisca da un poligono regolare tanto quanto si vorrà. Questi risultati sono di una squisita eleganza geometrica, e furono totalmente ignoti ai geometri greci. Purtuttavolta ecco come si parla di questa elegantissima proposizione del Legendre nelle *osservazioni di alcuni professori*, ecc., più volte citate nelle note precedenti.

« Il problema 16 lib. IV, ch' egli (Legendre) per altro riporta per » abbondanza, è *assolutamente superfluo*; e trattandosi di una esibi-

trovare il raggio di una circonferenza di questa lunghezza, ossia della circonferenza isoperimetra. Il centro del quadrato trovasi nel punto O d'intersezione delle due diagonali; quindi il raggio del cerchio circoscritto è OA, e quello dell'iscritto è la perpendicolare OB abbassata dal centro O sul lato AC, che resta diviso per metà nel punto B. Ora essendo $OB=AB$, il raggio del cerchio iscritto sarà uguale ad 1; ed il raggio AO del cerchio circoscritto sarà uguale alla radice quadrata di 2, ossia $\sqrt{2}$, perchè il triangolo ABO è rettangolo isoscele (n.° 180). Dunque il raggio del cerchio, di cui la circonferenza è 8 è compreso tra 1 e $\sqrt{2}$.

Ciò posto, se nell'espressioni (1), e (2) della proposizione precedente si ponga 1 in luogo di r, e $\sqrt{2}$ in luogo di R, si avranno i valori di r', e R', cioè de' raggi de' cerchi iscritto e circoscritto all'ottagono regolare, di cui il perimetro è 8. Se si mettono questi nuovi valori in vece di r, e R nell'espressioni

» zione del raggio del cerchio che dee approssimativamente pareggiare » una data quantità m^2, si riduce al maneggio della semplicissima equa» zione $\pi x^2 = m^2$. »

Dunque gli anonimi, o l'anonimo professore non ha avuto neppure il sospetto che in quel problema si tratta di determinare *graficamente* il raggio del cerchio che differisca da un dato quadrato di una quantità minore di qualunque data; e che partendo da quella costruzione il Legendre arriva anche ad esibire il valore approssimativo di π, cioè del rapporto della circonferenza al diametro, senza supporre d'altronde la conoscenza di questo medesimo rapporto? Infatti l'anonimo non fa alcun motto di quella determinazione grafica, e riduce tutto all'equazione suddetta, nella quale π è quantità, che deve necessariamente supporsi cognita, mentre l'autore francese la suppone incognita! Ma, dato pure che il Legendre non voglia con l'accennata proposizione che indicare un altro modo di determinare il rapporto π, sarà proibito al nostro autore questo duplicato, mentre se ne trovano molti in Euclide, e non mancano anche altri scempiati *aliter* aggiunti dagli espositori e commentatori?

Chi non ha letto lo osservazioni del nostro novello ipercritico non saprebbe mai immaginare a qual punto può giungere il pregiudizio e la prevenzione. Quindi sembrerà strano che noi ci siamo data la pena di far più volte parola di opinioni evidentemente erronee. Ma si giudicherà diversamente, quando si rifletterà che tali massime intorno alle moderne istituzioni di geometria, trovansi sparse fra molti, i quali ignari dello stato attualo delle Matematiche, uniscono la loro voce a quella dell'autore dell'opuscolo, e dichiarano libro di *moda* la geometria del Legendre, e corruttori della buona istituzione della gioventù quei professori, che insegnano un tal libro. Era dunque preso dalla vertigine della moda, e traviava la gioventù il sommo geometra Pietro Paoli, che introdusse la geometria del Legendre in tutte le scuole della Toscana? E questo libro classico non si vede ormai tradotto financo nella lingua araba, e nella turca? Per queste ragioni ci sia conceduto di poter mostrare ai giovani nel progresso di questo catechismo la stravaganza e la povertà di dottrina contenute in alcune altre pagine dell'opuscolo in quistione, nelle quali si accusa il Le-

citate (1), e (2), i valori che risulteranno, dinoteranno i raggi de' cerchi iscritto e circoscritto al poligono regolare di 16 lati, di cui il perimetro è 8. Proseguendo in questo modo, allorchè si sarà giunto al poligono di 4096 lati, il raggio del cerchio iscritto sarà espresso da 1,273239, e quello del circoscritto da 1,273239. Quindi si vede che per un poligono di 4096 lati, di cui il perimetro è 8, la differenza tra i raggi de' cerchi iscritto e circoscritto è minore di una unità della sesta cifra decimale. Ora essendo il lato del quadrato circoscritto a un cerchio uguale al diametro, ne segue che la circonferenza di un cerchio qualunque è sempre minore del quadruplo del diametro, ovvero di 8 volte il suo raggio. Laonde la differenza tra le circonferenze de' cerchi iscritto e circoscritto al poligono di 4096 è minore di 8 unità del sesto ordine decimale, e perciò minore di una unità del quinto ordine. Limitandoci a questa approssimazione, si può prendere il perimetro costante de' poligoni, che si è supposto uguale ad 8, per una di queste due circonferenze, dapoichè esso è compreso fra loro, vale a dire per la circonferenza di cui il raggio è 1,273239. Quindi una circonferenza uguale ad 8 ha il raggio uguale ad 1,273239. Il rapporto tra questa circonferenza ed il suo diametro, ovvero il rapporto tra la semicirconferenza ed il raggio è dunque

$$\frac{4}{1,273239}, \text{ ossia } \frac{4000000}{1273239} = 3,14159.$$

Perciò limitando l'approssimazione a cinque cifre decimali si ha

$$\pi = 3,14159.$$

288. *Scolio.* La rettificazione degli archi di cerchio si deduce facilmente da quella della circonferenza, premettendo che la circonferenza si suole dividere da' geometri in 360 parti uguali, che si chiamano gradi, ed ogni grado in 60 minuti, ed ogni minuto in 60 secondi.

---

gendre di aver errato nelle proposizioni relative ai *massimi*, e *minimi*, ed alla misura del triangolo sferico. Noi faremo vedere che l'autore anonimo con somma leggerezza ha esaminate le proposizioni su i massimi e minimi, che censura con magistrale sopracciglio; ed in prova di questa assertiva accenniamo per ora soltanto che, parlando della prop. 4 del Legendre, (*Appendice al* lib. IV) il nostro Aristarco conchiude: « Ora in qual modo farebbe il Legendre ad esibire, nel problema più » sopra recato, quel diametro ignoto, base del poligono, ch' è un proble- » ma *Trascendente*! .. Noi lasceremo meditare i geometri su questa *sentenza*, riserbandoci di farne il comento a suo luogo a profitto della nostra gioventù studiosa; e non tralasceremo d'informare anche di volo i geometri stessi dell' *errore effettivo*, *e non comportabile* (sono frasi dell' anonimo), che si contiene nell' enunciato della prop. 23 lib. VII del Legendre sulla misura del triangolo sferico; errore, com'essi sanno, in cui, stando ai dettami dell' anonimo, sarebbe incorso lo stesso sommo geometra Lagrange, nella sua Memoria sui triangoli sferici n.° 8, dove si leggono le me-

Per indicare un arco di un dato numero di gradi, minuti, e secondi, per esempio, di 48 gradi, 35 minuti, e 24 secondi, si scrive $48° 35' 24''$. Ciò posto, se si dinoti con A la lunghezza d'un arco, con N il numero de' gradi, minuti, e secondi di cui si compone, e con C la lunghezza della circonferenza alla quale appartiene, si avrà evidentemente:

$$A : C :: N : 360°,$$

da cui si ricava $A = \frac{C \times N}{360°}$,

vale a dire che per avere la lunghezza d'un arco, convien moltiplicare quella della circonferenza cui appartiene pel numero dei gradi di cui si compone, e dividere il prodotto per 360.

---

desime frasi del Legendre intorno alla misura del triangolo sferico! Noi non vogliamo già sostenere che i grandi uomini godano, come l'Euclide dell'anonimo, il privilegio di non errare; ma crediamo che debba farsi una distinzione importante. I grandi uomini possono errare ed hanno errato in argomenti astrusi e difficili come la teorica delle lenti acromatiche, la ricerca della resistenza che dovrebbe opporre un mezzo affinchè un corpo pesante descrivesse in esso una data curva, la ricerca della forma che devo prendere una massa fluida omogenea dotata di un movimento di rotazione etc. etc; ma sarebbe ridicolo supporre che in cose elementarissime, ciò che potrebbe essere avvertito da uno scolaro sfuggisse all'intelligenza privilegiata di un Newton, di un Eulero o di un Lagrange. Dire dunque, con la leggerezza dell'anonimo, che Legendre e Lagrange non seppero enunciare un teorema di Geometria elementare, o cosa simile, significa rinunziare alle regole della più sana critica, non che al sentimento di riverenza e di gratitudine che in ogni animo gentile emerge spontaneo al solo pronunziarsi il nome di uno di quei grandi maestri del genere umano.

Ma in fatto di Geometria elementare il nostro anonimo non ascolta ragioni, e però a pag. 45 dell'opuscolo continua a dirci che « da' libri elementari (de' moderni geometri) non solamente se ne trae una scienza » erronea, ma ne resta anche deturpata l'arte di ben ragionare, ch'è » uno de' principali effetti de' buoni elementi geometrici; intendendosi per tali come più sopra si dichiara, quelli soltanto di Euclide. Dunque dagli elementi geometrici di Alfonso Borelli, di Boscovich, di Wolfio, di Tommaso Simpson, di Niccolò de Martino, di Caravelli, di Karsten, di Leslie, di Lacroix, di Develey, o dagli stessi celebri elementi di Legendre, non si potrà cavar altro che una scienza erronea, e peggio l'abitudine di sragionare? . . .

Dopo tutto ciò, sembraci che debba meritar lode chi previene la gioventù studiosa contro siffatte stranezze; e ci sembra ancora che un assoluto silenzio intorno alle medesime potrebbe crear giustamente nell'opinione degli stranieri il dubbio di una poco onorevole adesione, quantunque l'insegnamento delle matematiche sia presso di noi a livello di quanto trovasi praticato nel resto dell'Europa. Laonde giustificheremo a suo luogo, como più sopra abbiam detto, Legendre e Lagrange, e se occorre, pubblicheremo in un libro *ex-professo* la confutazione delle accuse fatte al gran Newton, a Cartesio, a Monge, ed altri matematici sommi, a fine di far ricredere alcuni, che pare non sappiano lodare gli antichi

geometri senza biasimare i moderni. Nè con ciò intendiamo detrarre in nessuna parte all'alta stima ch'è dovuta ai grandi geometri dell'antichità. Euclide, Apollonio, e più di tutti Archimede, sono stati così benemeriti delle scienze esatte, che ai loro piedi la giusta posterità metterà sempre il suo rispetto e la sua gratitudine; ma lodando gli antichi non dobbiamo spingere la nostra ammirazione fino al punto di non conoscere che il prezioso retaggio da essi lasciatoci è stato talmente accresciuto dai grandi geometri moderni, e l'aspetto della scienza è talmente cambiato, che le opere de' primi non possono più mettersi nelle mani della gioventù.

Ed a questo proposito è curioso l'osservare che mentre gli esagerati ammiratori degli antichi ci hanno dato gran numero d'istituzioni su i conici, diverse da quelle del grande Apollonio, e molte dimostrazioni de' teoremi di Archimede diverse affatto dalle originali che sono così mirabili, pretendono poi che i soli elementi di Euclide debbano essere *intangibili*, e che la mente umana in due mila e più anni non abbia potuto e non possa mai più produrre niente di meglio! Ma ci danno poi essi veramente i genuini elementi euclidei? No certamente. Ed infatti quelli elementi si contengono in tredici libri de' quali s'insegnano soltanto i primi sei di geometria piana, e l'undecimo ed il dodicesimo di geometria solida, saltando a piè pari sopra i cinque rimanenti, che risguardano le proprietà de' numeri, la teorica delle grandezze commensurabili ed incommensurabili, i poliedri regolari, ec. Forse sono inutili questi libri, oppure si possono tralasciare senza distruggere tutto il sistema filosofico del saggio Euclide? Se questo sistema fosse stato studiato a fondo, si sarebbe veduto che i tredici libri accennati formano con legame indissolubile un solo corpo di dottrina, dapoichè Euclide sapeva benissimo che senza le teorie contenute ne' libri 7, 8, 9, e 10 la geometria piana sarebbe rimasta in una regione astratta e misteriosa, che avrebbe fatto nascere nella mente dello studente non pochi dubbj, i quali vengono dileguati dallo studio de' libri seguenti. Oltre a ciò egli, con somma sagacità, voleva che quelle teoriche precedessero le altre spettanti alla geometria solida cui dovevano apportare gran lume; per la qual cosa la disposizione de' libri euclidei è veramente ammirabile, nè si poteva far meglio, o altrimenti con i mezzi dell'epoca in cui vennero in luce.

Nulladimeno, sarebbe conveniente insegnare di questi tempi i cinque libri soppressi negli elementi di Euclide? — Dopo l'invenzione dell'Algebra ed il perfezionamento dell'Aritmetica, non v'ha dubbio che sarebbe cosa ridicola: ma non è men vero che un'opera dal cui centro si toglie più della sua terza parte debba rimanerne deformata ed imperfetta; se pure non voglia supporsi che Euclide, guardando nel futuro, avesse scritto in modo i suoi elementi da riuscire dopo tal mutilazione *l'opera umana più perfetta*, secondo l'opinione di alcuni.

Bastò poi la soppressione degl'indicati cinque libri per avere nell'opera di Euclide una istituzione elementare che contenesse almeno tutto il materiale geometrico trasmessoci dagli antichi? — Non bastò nè poteva bastare, perchè mancavano i teoremi di Archimede sul cilindro o sulla sfera, la misura del cerchio, ed i teoremi di Menelao e di Teodosio su i triangoli sferici; senza tener conto de' lavori de' moderni, e delle correzioni di cui abbisognavano molti luoghi della geometria solida di Euclide, per confessione dello stesso Roberto Simson. Convenne quindi ricorrere ai ristauri, alle giunte ed alle interpolazioni, e tutto ciò ad arbitrio del tipografo, o di qualche espositore e comentatore che alla meglio accozzava e cuciva fra loro materiali così disparati, ne' quali rimaneva sempre il gran vuoto delle considerazioni aritmetiche e delle dottrine geometriche contenute ne' libri 7, 8, 9, 10, e 13 soppressi.

Dopo questa esatta e spassionata esposizione, domanderemo anche ai non matematici, se conveniva meglio adottare per le scuole un libro proteiforme di tal fatta, oppure occuparsi a fondere in un solo corpo di dottrina le vecchie e le nuove conoscenze geometriche e farne un libro adattato ai nostri tempi? La risposta non potrebbe esser dubbiosa, ed a questo lavoro appunto si sono applicati dopo il risorgimento delle scienze molti distinti geometri, siccome di sopra si è accennato. Finora però meritano la preferenza, sopra ogni altro trattato, gli elementi di geometria dell'illustre Legendre, il quale deve esser considerato come il vero ristauratore di Euclide; dapoichè egli non solo ha magistralmente innestata l'Aritmetica alla geometria, ma ci ha dato con linguaggio uniforme, esatto e conciso quanto di più grande era stato inventato dagli antichi e dai moderni in fatto di geometria elementare, aggiungendovi le sue proprie scoperte che hanno grandemente contribuito al perfezionamento della scienza. Ed un tale difficilissimo lavoro non poteva essere eseguito con successo che da un uomo di genio, il quale doveva trovare in se medesimo forza d'ingegno ed autorità di nome bastanti per apprezzare il merito degli antichi senza esserne idolatra, osservare sino al giusto punto le forme, mantenere ed accrescere il rigore geometrico delle dimostrazioni, e più di tutto trapiantare, per dir così, la Geometria d'uno in altro terreno, perchè adempisse alla indispensabile condizione di dover servire *attualmente* come fondamento del sontuoso edifizio delle matematiche *moderne*; condizione cui non può evidentemente soddisfare la geometria di Euclide scritta 22 secoli indietro. Tanto fece il Legendre, nè vi è forse esempio di libro elementare che in così poco tempo come il suo si sia sparso per tutte le scuole del Mondo incivilito.

Non metteremo fine a questa nota senza dir qualche parola intorno alla taccia di poco amor patrio che da alcuni si dà ai professori che presso di noi insegnano opere matematiche straniere. Diremo dunque, che la buona istituzione della gioventù essendo il primo dovere di un maestro, non può andar soggetto a critica chi insegna le opere di Lacroix, di Legendre, di Monge, di Leroy, di Venturoli, di Puissant, etc.; che tutti sanno, appartenere i grandi uomini non ad un paese, o ad un luogo particolare, ma al mondo intero; che i buoni libri elementari sono forse più scarsi e più difficili a farsi delle stesse opere di genio; che grandi nazioni non hanno sdegnato e non isdegnano di tradurre ed adottare per l'insegnamento gli stessi libri sopra menzionati; ed infine, che i professori di matematica i quali, in tutto o in parte, si servono ora nelle loro scuole de' su lodati libri stranieri, saranno i primi ad abbandonarli appena che gli oppositori potranno ad essi additare libri nazionali di egual merito.

Nota dichiarativa alla proposizione XXXI cap. V.

Gli angusti limiti prescritti ad un catechismo ci hanno impedito di esporre in tutto il suo sviluppo la dimostrazione della proposizione che ha per oggetto la misura del rettangolo. Ma siccome nel sistema da noi adottato quel teorema è cardine principale della dottrina delle proporzioni delle figure, crediamo utile distenderne in questa nota la dimostrazione con tutti i suoi particolari, affinchè non rimanga alcun dubbio nella mente degli allievi che in una seconda lettura volessero approfondire le teoriche già apprese.

TEOREMA

L' aja di un rettangolo qualunque ACHE *ha per misura il prodotto della sua base* CH *per l' altezza* AC (figura 29).

Rappresenti x il lato del quadrato stabilito per unità di misura delle superficie (§§. 117, 119). Possono darsi tre casi; 1.° quando i lati AC, CH del proposto rettangolo sono ambedue commensurabili col lato x del quadrato unità, 2.° quando un lato è commensurabile e l'altro no, 3.° quando nessuno de' due lati è commensurabile con x.

1.° Se i lati AC, CH del rettangolo sono commensurabili coll' unità di lunghezza x, supponiamo che questa retta unità adattata successivamente su i lati AC, CH sia contenuta due volte in CH e quattro in AC esattamente. Rimarrà così divisa la retta AC in quattro parti eguali ne' punti F, D, B, e la CH in due parti nel punto N; ed ognuna di tali parti uguaglierà l' unità lineare x. Per i punti di divisione B, D, F si tirino le rette BP, DK, FG parallele a CH, e pel punto N si conduca NM parallela ad AC. Con questa costruzione il proposto rettangolo $ACHE$ risulterà evidentemente diviso in piccoli quadrati tutti eguali fra loro ed eguali al quadrato unità. Il numero de' quadrati sarà 8, e potrà supporsi composto, o di due serie CM, NE ognuna di quattro quadrati, o di quattro serie BH, DP, FK, AG ciascuna di due quadrati; onde è chiaro che quel numero sarà il prodotto di 2 per 4, cioè il prodotto del numero delle unità lineari contenute in CH pel numero delle unità lineari contenute in AC. Ma il numero 8 esprime quanti quadrati unità sono contenuti nel proposto rettangolo, ed è perciò la misura di esso rettangolo (§. 117); dunque *il rettangolo* ACHE *ha per misura il prodotto de' suoi lati* AC, CH.

Potrebbe accadere che l' unità lineare x, quantunque commensurabile co' lati AC, CH del proposto rettangolo, non fosse contenuta esattamente in ciascuno di essi. Allora le tre rette x, AC, CH dovranno avere una *comune misura* che non sarà x ma un' *aliquota* di x (§. 91, 93). Supponiamo per fissare le idee, che

la terza parte d' x sia misura comune delle rette AC, CH, e riportata successivamente sopra ognuna di esse sia contenuta due volte in CH e quattro in AC. Ragionando come qui sopra si conchiuderà che il proposto rettangolo rimane diviso in 8 quadrati ciascuno de' quali ha per lato la terza parte dell' unità lineare; ed anche in questa ipotesi il rettangolo avrà per misura il prodotto de' suoi lati. Imperciocchè supponendo fatto il quadrato sull' unità lineare x, diviso ogni suo lato in tre parti eguali, ed uniti i punti di divisione, il quadrato unità sarà evidentemente composto di nove quadrati ciascuno de' quali ha per lato la terza parte dell' unità lineare; e però ognuno di questi piccoli quadrati sarà la *nona* parte del quadrato unità. Ma il proposto rettangolo conteneva 8 di questi quadrati; dunque esso avrà per misura $\frac{8}{9}$ del quadrato unità. Da un' altra parte il numero 8 è sempre il prodotto del numero delle parti eguali contenute nel lato CH pel numero delle parti contenute nel lato AC; se non che in questo caso ognuna di quelle parti è $\frac{1}{3}$ dell' unità lineare, onde il prodotto de' due lati espressi in parti dell' unità lineare corrisponde a quello delle frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$, cioè ad $\frac{8}{9}$, quale è appunto la misura del rettangolo proposto.

2.° Se la base CH del rettangolo è commensurabile con l' unità lineare x e l' altezza AC incommensurabile, dico che la misura del rettangolo sarà anche $CH \times AC$. In fatti, se è possibile, il rettangolo abbia per misura il prodotto di CH per un'altezza minore o maggiore di AC, per esempio CO. Si prenda dell' unità lineare x una tal parte aliquota CR, che sia minore di AO, e si porti successivamente su i lati CH, CA del rettangolo a partire dal punto C; essa sarà contenuta un numero esatto di volte in CH, e dovrà segnare sul lato AC un punto di divisione L compreso fra A ed O. Conducendo pel punto L la retta LD parallela a CH il rettangolo $LCHD$ che ne risulta avrà i suoi lati commensurabili con l' unità lineare, e per ciò che si è dimostrato qui sopra sarà misurato dal prodotto di CH per CL; ma questo prodotto è evidentemente maggiore di quello di CH per CO, che si è supposto la misura del rettangolo dato, dunque il rettangolo $LCHD$ sarà maggiore del rettangolo $ACHE$, il che è assurdo. Similmente si dimostrerebbe che il rettangolo proposto non può avere per misura il prodotto di CH per un' altezza maggiore di AC, e quindi, anche in questo secondo caso, il proposto rettangolo ha per misura il prodotto de' suoi lati.

3.° Siano ambedue i lati CH, AC incommensurabili con l'unità lineare x; e se è possibile, in questa terza ipotesi il rettangolo $ACHE$ abbia per misura il prodotto della base CH per un' altezza CO minore di AC. Si prenda un' aliquota di x minore di AO e si porti ripetutamente sopra AC partendo dal punto C. Un punto di divisione dovrà cadere in L fra A ed O, e compito il rettangolo $LCHD$, esso avrà un lato LC commensurabile

con l'unità lineare, e l'altro CH incommensurabile. La sua misura, pel secondo caso, sarà $CH \times CL$, il quale prodotto essendo maggiore di $CH \times CO$ ne risulterà come qui sopra, l'assurdo che il rettangolo $CHDL$ parte di $ACHE$ sarebbe maggiore del tutto.

Dunque in ogni caso, *un rettangolo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per l'altezza.*

Scolio. Si potrebbe domandare cosa esprime il prodotto de' due lati CH, AC del rettangolo nel 2.° e nel 3.° caso considerati qui sopra, quando uno o ambedue quelli lati non possono assegnarsi esattamente in parti dell'unità lineare, e quindi in numeri? Una tale circostanza indica che il rettangolo non può esprimersi esattamente nè in numeri interi nè in numeri frazionarii per mezzo dell'unità superficiale, cioè che il rettangolo è incommensurabile con quella unità, e la sua misura è un numero irrazionale. In questi casi è chiaro che, valutando i lati del rettangolo per mezzo di aliquote dell'unità lineare sempre più piccole, si avrà una serie di rettangoli commensurabili con l'unità quadrata, che andranno avvicinandosi di più in più al rettangolo proposto sino a differirne per una quantità minore di qualunque data. Il rettangolo proposto sarà dunque un *limite*, al quale gli accennati rettangoli razionali potranno avvicinarsi quanto si vorrà senza però mai raggiungerlo. Tutto ciò è conforme alla natura delle quantità incommensurabili, dall'idea delle quali i giovani non devono rifuggire come da uno spauracchio, ma debbono avvezzarsi a considerarle da vicino, e se la loro mente non può giungere a comprenderle interamente, basta che si fermi su questo gran principio che è l'anima di tutte le scienze matematiche; *un approssimazione indefinita, e ad arbitrio del calcolatore, equivale all' esattezza.* Sappiamo che taluni vorrebbero espellere dalla geometria elementare ogni considerazione attenente all'incommensurabilità, ma noi opiniamo, con tutti i geometri moderni, che non vince una difficoltà con eluderla o mascherarla, ma con affrontarla apertamente; per la qual cosa, se l'amor proprio non c'inganna, stimiamo che uno de' principali vantaggi che si ottiene dalla misura diretta del rettangolo sia appunto l'opportunità di considerare fin da principio le quantità geometriche quali sono effettivamente, e studiarne attentamente e senza orpello o mistero la natura.

INDICE.

36
37
38
40
41
42
43
45
46
47
50
51
54
56
57
58
60
66
65
64